Elektronski fakultet u Nišu

ELEKTRONSKE KOMPONENTE

(Semestar II, 2010. god)

Zadaci sa računskih vežbi, prvi deo

ZADATAK 1: Razmatra se standardni niz nazivnih vrednosti otpornosti.

a) **Odrediti koja vrednost tolerancije odgovara nizu E12.**

b) **Odrediti kom standardnom nizu odgovara tolerancija 2.5%.**

....

Rešenje:

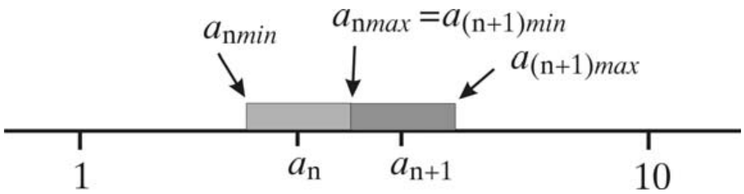
Niz nazivnih vrednosti (otpornosti, kapacitivnosti, itd.) je geometrijski niz čiji je faktor q. Oznaka niza se formira prema broju članova niza u jednoj dekadi. Ako u jednoj dekadi nazivnih vrednosti (od 1 do 10, ili na primer od 100 do 1000) imamo n članova, onda će oni biti:

prvi: $a_1 = 1 \cdot q = q$

drugi: $a_2 = a_1 \cdot q = q^2$ n-ti: $a_n = q^n = 10 \quad \rightarrow \quad q = \sqrt[n]{10}$

treći: $a_3 = a_2 \cdot q = q^3$

Nazivne vrednosti, uključujući toleranciju δ, treba da pokriju sve realne vrednosti, tj. maksimalna prethodna vrednost treba da se poklapa sa minimalnom narednom nazivnom vrednošću:



$$a_{n\max} = a_{(n+1)\min}$$

$$a_n(1+\delta) = a_{(n+1)}(1-\delta) \qquad \text{dakle,} \quad 1+\delta = q \cdot (1-\delta)$$

$$a_n(1+\delta) = a_n q\,(1-\delta)$$

a) Za niz E12 imaćemo da je geometrijski faktor niza $q = \sqrt[12]{10} = 10^{1/12} = 1.2115$, pa je

$$\begin{aligned} 1+\delta &= q - q\delta \\ \delta(1+q) &= q-1 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \quad \delta = \frac{q-1}{q+1} = 0.09564 \approx 10\%$$

Dakle, komponente čije nazivne vrednosti pripadaju nizu E12 su sa tolerancijom **10%**.

b) Neka je sada data tolerancija δ=2.5% =0.025. Odredimo broj članova niza preko faktora q

$$q = \frac{1+\delta}{1-\delta} = \frac{1.025}{0.975} = 1.05128$$

Kako je

$$q = \sqrt[n]{10} = 10^{1/n} \quad \Rightarrow \quad \log q = \frac{1}{n} \quad \text{to se dobija} \quad n = \frac{1}{\log q} = \frac{1}{\log 1.05128} = 46$$

a to znači da bi tolerancija 2.5% odgovarala nizu E46. Medjutim, taj niz ne postoji i ovde se u stvari radi o nizu E48 sa tolerancijom 2%. U praksi imamo sledeće nizove (E6, E12, E24, E48, E96, E192) kojima odgovaraju redom tolerancije (20%, 10%, 5%, 2%, 1%, 0.5%). Tako, niz E24 sadrži pored svih članova niza E12 i geometrijske sredine susednih članova niza. Primer otpornosti iz niza E12:

1.0 Ω 1.2 1.5 1.8 2.2 2.7 3.3 3.9 4.7 5.6 6.8 8.2 Ω

ZADATAK 2: SMD otpornik pravougaonog oblika, dužine *a*=2mm i širine *b*=0.5mm, nalazi se zalemljen na štampanoj ploči (PCB). Otpornik je realizovan od oksida kalaja, čija je slojna otpornost R_S=250 Ω/□, a štampana ploča od kompozitnog FR-4 (FlameRetardant) debljine d=1 mm i koeficijenta termičke provodnosti *k*=0.25 $WK^{-1}m^{-1}$.

a) Odrediti vrednost otpornosti ovog SMD otpornika.

b) Ako je maksimalna snaga ovog otpornika 1/8 W, odrediti maksimalni napon na koji se on sme priključiti.

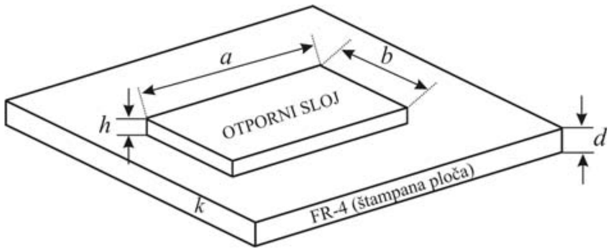
c) Ako je maksimalno dozvoljeno pregrevanje SMD otpornika 80°C, odrediti koliko se toplote sa njega odvodi procesom provodjenja kroz PCB.

....

Rešenje:

Otpornost SMD otpornika je

$$R = \rho \cdot \frac{a}{bh} = \frac{\rho}{h} \cdot \frac{a}{b} = R_S \cdot n$$



gde je slojna otpornost $R_S = \frac{\rho}{h}$ otpornost jednog kvadrata. Kako je broj kvadrata

$$n = \frac{a}{b} = \frac{2mm}{0.5mm} = 4$$

to je otpornost ovog otpornika

$$R = R_S \cdot n = 250 \cdot 4 = 1k\Omega$$

b) Maksimalna snaga koja se razvija na otporniku iznosi

$$P_{\max} = \frac{U_{\max}^2}{R} = 125\, mW ,$$

odakle se može odrediti masimalni napon koji se sme dovesti na otpornik, a da se ova snaga ne prekorači

$$U_{\max} = \sqrt{R \cdot P_{\max}} = \sqrt{1000 \cdot 0.125} = 11.18V$$

c) Površina otpornika, tj površina kojom on naleže na štampanu ploču je

$$S = a \cdot b = 1\, mm^2$$

Toplota se sa otpornika odaje kroz tri mehanizma: provodjenjem (kondukcija), opstrujavanjem vazduhom (konvekcija) i zračenjem (radijacija). Za proces provodjenja toplote postoji analogija sa Omovim zakonom za provodjenje električne struje, gde je količina proteklog naelektrisanja

$$q = I \cdot t = \frac{U}{R} \cdot t = \frac{\Delta\varphi}{\rho \cdot l} S \cdot t = \sigma \cdot \frac{\Delta\varphi \cdot S}{l} \cdot t$$

Dakle, za količinu toplote (energije) koja se pri razlici temperatura *ΔT* kroz sredinu provodnosti *k* i debljine (dužine) provodnog puta *d* prenese preko površine *S* za vreme τ dobija se izraz

$$Q = P \cdot \tau = k \cdot \frac{\Delta T \cdot S}{d} \cdot \tau \quad ,$$

pa je konačno tražena snaga

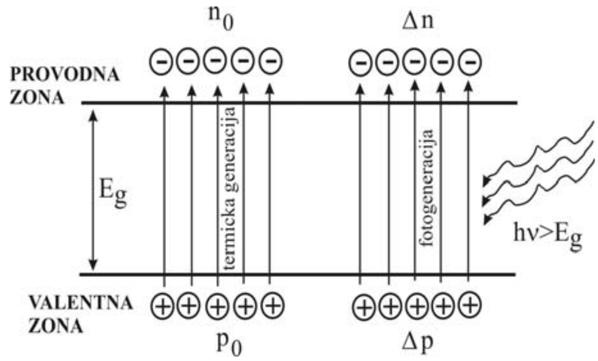
$$P = k \cdot \frac{\Delta T \cdot S}{d} = 0.25 \frac{W}{mK} \cdot \frac{80^o C \cdot 1 \times 10^{-6} m^2}{1 \times 10^{-3}} = 20\, mW$$

ZADATAK 3: Struja kroz neosvetljeni fotootpornik pri naponu U=10V iznosi 400 μA. Kada se pri istom naponu on izloži osvetljaju E_1=500 lx, struja kroz njega je 2 mA, a pri osvetljaju E_2=1500 lx struja kroz ovaj fotootpornik iznosi 6 mA. Koliki će biti pad napona na ovom fotootporniku kada je on osvetljen sa 1000 lx i kada je struja kroz njega 2.2 mA.

....

Rešenje:

Kada je fotootpornik neosvetljen u njemu postoji odredjena koncentracija termički generisanih nosilaca (elektrona n_0 i šupljina p_0) koji na odredjenom naponu daju struju tame. Kada se fotootpornik osvetli, pored termičke generacije nosilaca prisutna je i fotogeneracija nosilaca (unutrašnji fotoefekat), pa je specifična provodnost fotootpornika



$$\sigma = q\{\mu_n(n_0+\Delta n)+\mu_p(p_0+\Delta p)\} = q(\mu_n n_0+\mu_p p_0) + \underbrace{q(\mu_n\Delta n+\mu_p\Delta p)}_{fotoprovodnost} = \sigma_0+\sigma_f$$

zbir specifične provodnosti u mraku i specifične fotoprovodnosti. Na osnovu ovoga se ukupna struja pri nekom naponu može izraziti kao zbir struje tame i fotostruje

$$I = G\cdot U = \sigma\frac{S}{l}\cdot U = \frac{S}{l}U\cdot(\sigma_0+\sigma_f) = I_t + I_f$$

pri čemu je zavisnost fotostruje od osvetljaja E data izrazom

$$I_f = C\cdot E^x$$

Struja je dakle direktno srazmerna naponu. Pri naponu U=10V struja tame je I_t=*400 μA*. Vrednosti fotostruje na dva različita osvetljaja E_1 i E_2 iznose

$$I_{f1} = I_1 - I_t = 2000-400 = 1600\ \mu A = C\cdot E_1^x$$

$$I_{f2} = I_2 - I_t = 6000-400 = 5600\ \mu A = C\cdot E_2^x$$

Iz odnosa ovako dobijenih fotostruja odredjujemo nepoznate parametre *C* i *x*

$$\frac{I_{f2}}{I_{f1}} = \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^x \Rightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{I_{f2}}{I_{f1}}\right)}{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)} = \frac{\ln(3.5)}{\ln 3} = 1.1403 \qquad C = \frac{I_{f1}}{E_1^x} = \frac{1600\mu A}{500^{1.1403}} = 1.3381\ \mu A$$

Kada bi fotootpornik bio izložen osvetljaju E_3=1000 lx struja kroz njega bi pri U=10V bila

$$I = I_t + I_{f3} = I_t + C\cdot E_3^x = 400 + 1.3381\cdot 1000^{1.1403} = 3927\ \mu A$$

što znači da je pri osvetljaju od 1000 lx otpornost ovog fotootpornika

$$R = \frac{U}{I} = \frac{10\ V}{3927\ \mu A} = 2546\ \Omega$$

Prema tome, kada kroz ovaj fotootpornik bude proticala struja od 2.2 mA, traženi pad napona na njemu biće $U = 2546\cdot 2.2\times 10^{-3} = 5.6\ V$.

ZADATAK 4: Fotootpornik na radnom naponu od 10V daje struju od 100 μA u tami, 500 μA pri osvetljaju od 300 lx i 2 mA pri osvetljaju od 1200 lx. Odrediti kolikom maksimalnom osvetljaju sme da se izloži ovaj fotootpornik, na radnom naponu, ako je njegova maksimalna dozvoljena snaga disipacije 0.05 W.

....

Rešenje:

Ukupna struja kroz osvetljeni fotootpornik je zbir struje u tami $I_t=100\ \mu A$ i fotostruje I_f (struje nosilaca generisanih unutrašnjim fotoefektom).

$$I = I_t + I_f$$

Zavisnost fotostruje od osvetljaja E je po zakonu

$$I_f = C \cdot E^x$$

gde su C i x konstante (C zavisi od napona na otporniku). Prema tome, maksimalna snaga na fotootporniku dobiće se za onu vrednost osvetljaja za koju je fotostruja maksimalna

$$P_{\max} = U \cdot I_{\max} = U \cdot (I_t + I_{f\max})$$

Odavde je maksimalna fotostruja

$$I_{f\max} = \frac{P_{\max}}{U} - I_t = 4900\ \mu A$$

za koju važi

$$I_{f\max} = C \cdot E_{\max}^x$$

Potrebno je najpre odrediti nepoznate parametre C i x. Kako je

$$I_{f1} = I_1 - I_t = 500 - 100 = 400\ \mu A = C \cdot E_1^x \qquad E_1=300\ \text{lx}$$

$$I_{f2} = I_2 - I_t = 2000 - 100 = 1900\ \mu A = C \cdot E_2^x \qquad E_2=1200\ \text{lx}$$

iz odgovarajućih odnosa dobijamo

$$\frac{I_{f2}}{I_{f1}} = \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^x \Rightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{I_{f2}}{I_{f1}}\right)}{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)} = \frac{\ln(4.75)}{\ln 4} = 1.124 \qquad C = \frac{I_{f1}}{E_1^x} = \frac{400\mu A}{530^{1.124}} = 0.6573\ \mu A$$

Konačno, maksimalni osvetljaj kome sme da se izloži fotootpornik, a da se ne prekorači maksimalna snaga je

$$E_{\max} = \left(\frac{I_{f\max}}{C}\right)^{\frac{1}{x}} = 2787\ lx$$

ZADATAK 5: Fotootpornik u potpunom mraku ima otpornost R_0=100 kΩ. Kada se upali tačkasti izvor svetlosti, koji je na rastojanju 1.2 m od ovog fotootpornika, njegova otpornost padne na R_1=4 kΩ, a kada se izvor svetlosti približi na 75 cm, otpornost fotootpornika padne na R_2=1.46 kΩ. Odrediti kolika će biti otpornost ovog fotootpornika ako se tačkasti izvor svetlosti približi na 50 cm od fotootpornika.

....

Rešenje:

Pretpostavimo da je fotootpornik priključen na napon U=1 V. Struja mraka je tada

$$I_t = \frac{U}{R_0} = \frac{1V}{100k\Omega} = 10\mu A$$

Na rastojanju r_1=120 cm je osvetljaj E_1, pa je tada ukupna struja

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{1V}{4k\Omega} = 250\mu A$$, dok je fotostruja $I_{f1} = I_1 - I_t = 240\mu A$

Na isti način je na rastojanju r_2=75 cm osvetljaj E_2, pa je ukupna struja

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{1V}{1.46k\Omega} = 685\mu A$$, dok je fotostruja $I_{f2} = I_2 - I_t = 675\mu A$

Polazeći od toga da je fotostruja data izrazom

$$I_f = C \cdot E^x$$

i da je zavisnost osvetljaja od rastojanja po zakonu $\mathbf{1/r^2}$,

$$E = A \cdot \frac{1}{r^2}$$

za odnos fotostruja dobićemo

$$\frac{I_{f2}}{I_{f1}} = \frac{C \cdot E_2^x}{C \cdot E_1^x} = \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^x = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2x}$$

odakle odredjujemo

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log(I_{f2}/I_{f1})}{\log(r_1/r_2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log 2.8125}{\log 1.6} = 1.1$$

Sada se za rastojanje r_3=50 cm i osvetljaj E_3 koji odgovara ovom rastojanju dobija

$$\frac{I_{f3}}{I_{f1}} = \left(\frac{E_3}{E_1}\right)^x = \left(\frac{r_1}{r_3}\right)^{2x} = \left(\frac{120}{50}\right)^{2.2} = 6.8622$$

pa je

$$I_{f3} = 240\mu A \cdot 6.8622 = 1647\mu A$$

$$I_3 = I_{f3} + I_t = 1657\mu A$$

Konačno je tražena otpornost

$$R_3 = \frac{U}{I_3} = \frac{1V}{1657\mu A} = 603.5\,\Omega$$

ZADATAK 6: Otpornost žičanog otpornika na temperaturi T_1=70°C iznosi 120 Ω, a na temperaturi T_2=100°C iznosi 126 Ω. Izračunati vrednost ovog otpornika na T_3=45°C.

....

Rešenje:

Kod žičanih otpornika, kao i kod legura i metalnih provodnika, otpornost se linearno povećava sa temperaturom po zakonu

$$R = R_0(1+\alpha \cdot \Delta T) \ = R_0\left[1+\alpha(T - T_0)\right]$$

gde je α temperaturni koeficijent otpornosti, a R_0 otpornost na temperaturi T_0 (obično je to 0°C ili 20°C). Na dve temperature T_1=70°C i T_2=100°C imaćemo za otpornosti

$$R_1 = R_0(1+\alpha \cdot \Delta T_1) \ = 120\,\Omega$$

$$R_2 = R_0(1+\alpha \cdot \Delta T_2) \ = 126\,\Omega$$

odakle je

$$R_2 - R_1 = R_0\alpha(\Delta T_2 - \Delta T_1) = R_0\alpha(T_2 - T_1) \ = 6\Omega$$

Iz poslednjeg izraza je

$$R_0\alpha = \frac{R_2 - R_1}{T_2 - T_1} = \frac{6\Omega}{30^o C} = 0.2\ \Omega/^o C$$

Na sličan način, izražavanjem otpornosti na temperaturi T_3=45°C

$$R_3 = R_0(1+\alpha \cdot \Delta T_3)$$

dobijamo

$$R_2 - R_3 = R_0\alpha(\Delta T_2 - \Delta T_3) = R_0\alpha(T_2 - T_3) \ = 0.2\frac{\Omega}{^o C}\cdot(100^o C - 45^o C) = 11\Omega$$

pa je odavde

$$R_3 = R_2 - 11\Omega = 115\,\Omega$$

Napomena: tipično povećanje otpornosti kod metala (bakra, na primer) je oko 40% za promenu temperature od 100°C. Ako je na temperaturi 0°C otpornost žice 10Ω, na temperaturi 100°C otpornost će biti 14Ω. To znači da je temperaturni koeficijent $\alpha = 40\%/100^o C = 4\times10^{-3}\ {}^oC^{-1}$.

Izuzetno čisti metali (bez primesa), imaju jako dobro definisanu i reproduktivnu temperaturnu karakteristiku otpornosti. Tako je za **platinu**, koja se kao plemeniti metal lako reprodukuje u čistom stanju, otpornost data izrazom

$$R(t) = R_0[1+At+Bt^2+C(t-100)^3]$$

gde je

$$A = 3.940\times10^{-3}\ {}^oC^{-1}$$

$$B = -5.8\times10^{-7}\ {}^oC^{-2} \qquad 1+At+Bt^2+C(t-100)^3$$

$$C = -4.0\times10^{-12}\ {}^oC^{-3}$$

pa se otpornik od platine koristi kao standard za baždarenje u opsegu temperatura od -190°C do +660°C.

ZADATAK 7: Izvesti uslove za temperaturnu kompenzaciju otpornosti kod:

a) Redne veze otpornika

b) Paralelne veze otpornika

..

Rešenje:

Neka su data dva otpornika R_1 i R_2 čiji su temperaturni koeficijenti otpornosti α_1 i α_2. Izražavanjem zavisnost otpornosti od temperature kao

$$R_1 = R_{10}(1+\alpha_1\Delta T) \quad \text{i} \quad R_2 = R_{20}(1+\alpha_2\Delta T)$$

za rednu vezu dobićemo

$$\begin{aligned} R_e = R_1 + R_2 &= R_{10}(1+\alpha_1\Delta T) + R_{20}(1+\alpha_2\Delta T) \\ &= R_{10} + R_{20} + (R_{10}\alpha_1 + R_{20}\alpha_2)\Delta T \\ &= (R_{10}+R_{20})\cdot\left[1+\frac{R_{10}\alpha_1 + R_{20}\alpha_2}{R_{10}+R_{20}}\Delta T\right] \end{aligned}$$

Očigledno, razlomak u velikoj zagradi jeste ekvivalentni temperaturni koeficijent redne veze

$$\alpha_{\mathrm{Re}} = \frac{R_{10}\alpha_1 + R_{20}\alpha_2}{R_{10}+R_{20}}$$

Da bi redna veza otpornika bila temperaturno kompenzovana, potrebno je da ekvivalentni temperaturni koeficijent bude jednak nuli, pa je uslov temperaturne kompenzacije

$$R_{10}\alpha_1 = -R_{20}\alpha_2$$

Za odredjivanje ekvivalentnog temperaturnog koeficijenta kod paralelne veze otpornika sledeći pristup se pokazao jako pogodnim. Temperaturni koeficijent se može izraziti na sledeći način:

$$\alpha_R = \frac{1}{R}\cdot\frac{\Delta R}{\Delta T} = \frac{1}{R}\cdot\frac{dR}{dT}$$ (*važi kod malih promena temperature dT≈ΔT*)

Kako za paralelnu vezu otpornika važi

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Diferenciranjem leve i desne strane po temperaturi dobijamo

$$-\frac{1}{R_e^2}\cdot\frac{dR_e}{dT} = -\frac{1}{R_1^2}\cdot\frac{dR_1}{dT} - \frac{1}{R_2^2}\cdot\frac{dR_2}{dT}$$

odnosno

$$\frac{1}{R_e}\cdot\frac{1}{R_e}\cdot\frac{dR_e}{dT} = \frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_1}\cdot\frac{dR_1}{dT} + \frac{1}{R_2}\cdot\frac{1}{R_2}\cdot\frac{dR_2}{dT}$$

$$\frac{\alpha_{\mathrm{Re}}}{R_e} = \frac{\alpha_1}{R_1} + \frac{\alpha_2}{R_2}$$

$$\alpha_{\mathrm{Re}} = R_e\left(\frac{\alpha_1}{R_1} + \frac{\alpha_2}{R_2}\right) = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\cdot\frac{R_2\alpha_1 + R_1\alpha_2}{R_1R_2} = \frac{R_2\alpha_1 + R_1\alpha_2}{R_1+R_2}$$

Da bi paralelna veza bila temperaturno kompenzovana potrebno je da je ekvivalentni temperaturni koeficijent jednak nuli, odnosno da je ispunjen uslov:

$$R_1\alpha_2 = -R_2\alpha_1$$

ZADATAK 8: NTC otpornik (termistor) na temperaturi 45°C ima otpornost R_1=4 kΩ, a na temperaturi 70°C R_2=1.25 kΩ. Odrediti:

c) **Parametre u izrazu za temperaturnu zavisnost otpornosti NTC otpornika**
d) **Vrednost otpornosti i temperaturni koeficijent na temperaturama 90°C i 110°C**

....

Rešenje:

a) Temperaturna zavisnost otpornosti NTC (*Negative Temperature Coefficient*) otpornika je jako opadajuća eksponencijalna funkcija i može se predstaviti sledećim izrazom

$$R(T) = R_\infty \cdot e^{\frac{B}{T}}$$

gde je B – koeficijent temperaturne osetljivosti termistora [K], T – apsolutna temperatura [K], i R_∞ - konstanta koja zavisi od materijala i dimenzija termistora i predstavlja uslovnu otpornost na beskonačno visokoj temperaturi, odnosno asimptotsku vrednost. Iz poznatih otpornosti na dve temperature formiramo sistem jednačina za odredjivanje dve nepoznate B i R_∞.

$$R_1 = R_\infty \cdot e^{\frac{B}{T_1}} = 4\ k\Omega \qquad T_1 = 45^o C = 318K$$

$$R_2 = R_\infty \cdot e^{\frac{B}{T_2}} = 1.25\ k\Omega \qquad T_2 = 70^o C = 343K$$

Deljenjem ovih jednačina eliminišemo parametar R_∞ i odredjujemo parametar B

$$\frac{R_1}{R_2} = e^{B\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)} = e^{B\frac{T_2-T_1}{T_1T_2}} \qquad \text{odakle je} \quad B = \frac{T_1T_2}{T_2-T_1}\ln\frac{R_1}{R_2} = 5074.8\ K$$

a iz nekog podatka za otpornost dobijamo i

$$R_\infty = R_2 \cdot e^{-\frac{B}{T_2}} = 0.46922\ m\Omega$$

b) Pošto znamo parametre temperaturne karakteristike NTC otpornika R_∞ i B, možemo odrediti otpornost na bilo kojoj temperaturi. Tako, na T_3=90°C=363K i T_4=110°C=383K iznose

$$R_3 = R_\infty \cdot e^{\frac{B}{T_3}} = 553.2\ \Omega \qquad \text{i} \qquad R_4 = R_\infty \cdot e^{\frac{B}{T_4}} = 266.6\ \Omega$$

Kako je temperaturni koeficijent otpornosti po definiciji (za male promene temperature)

$$\alpha_R = \frac{1}{R}\cdot\frac{dR}{dT}$$

to je kod NTC otpornika

$$\alpha_{NTC} = \frac{1}{R}\cdot\frac{dR}{dT} = \frac{1}{R}\cdot R_\infty \cdot e^{\frac{B}{T}} \cdot \left(-\frac{B}{T^2}\right) = -\frac{B}{T^2}$$

Na temperaturama T_3 i T_4 on iznosi

$$\alpha_{NTC3} = -\frac{B}{T_3^2} = -38.5\times10^{-3}K^{-1} \qquad \text{i} \qquad \alpha_{NTC4} = -34.6\times10^{-3}K^{-1}$$

ZADATAK 9: Jedan PTC otpornik ima otpornosti 60, 70 i 84 Ω na temperaturama 60, 70 i 80°C, respektivno.

e) Izračunati parametre temperaturne zavisnosti PTC otpornika

f) Na osnovu dobijenih rezultata izračunati temperaturni koeficijent PTC otpornika na temperaturi T=70°C.

g) Ako se ovaj otpornik paralelno veže sa otpornikom koji na 20°C ima otpornost R=200 Ω i temperaturni koeficijent otpornosti α_R=-2x10^{-3}K^{-1}, izračunati ekvivalentni temperaturni koeficijent ove paralelne veze na T=70°C.

..

Rešenje:

a) Temperaturna karakteristika PTC (*Positive Temperature Coefficient*) otpornika je

$$R(T) = A + C \cdot e^{BT}$$

gde je su A [Ω], C [Ω] i B [K^{-1}] parametri. Iz poznatih vrednosti otpornosti za tri temperature

$$R_1 = A + C \cdot e^{BT_1} \qquad R_1 = 60\,\Omega \qquad T_1 = 333K$$

$$R_2 = A + C \cdot e^{BT_2} \qquad R_2 = 70\,\Omega \qquad T_2 = 343K$$

$$R_3 = A + C \cdot e^{BT_3} \qquad R_3 = 84\,\Omega \qquad T_3 = 353K$$

dobijamo sistem jednačina iz kojeg odredjujemo tri parametra, A, B i C. Oduzimanjem ovih jednačina očigledno eliminišemo parametar A

$$R_3 - R_2 = C \cdot \left(e^{BT_3} - e^{BT_2}\right)$$

$$R_2 - R_1 = C \cdot \left(e^{BT_2} - e^{BT_1}\right)$$

Deljenjem poslednjih jednačina eliminisaćemo i parametar C

$$\frac{R_3 - R_2}{R_2 - R_1} = \frac{e^{BT_3} - e^{BT_2}}{e^{BT_2} - e^{BT_1}} = \frac{e^{BT_2} \cdot [e^{B(T_3 - T_2)} - 1]}{e^{BT_1} \cdot [e^{B(T_2 - T_1)} - 1]}$$

Dobijena jednačina je jednačina po parametru B. Kako je u našem slučaju T_3-T_2=T_2-T_1 to se poslednja jednačina znatno uprošćuje

$$\frac{R_3 - R_2}{R_2 - R_1} = \frac{e^{BT_2}}{e^{BT_1}} = e^{B(T_2 - T_1)}$$

odakle se redom dobijaju vrednosti parametara PTC otpornika

$$B = \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \ln\left(\frac{R_3 - R_2}{R_2 - R_1}\right) = 33.647 \times 10^{-3} K^{-1}$$

$$C = \frac{R_2 - R_1}{e^{BT_2} - e^{BT_1}} = 340.31 \times 10^{-6} \Omega$$

$$A = R_1 - C \cdot e^{BT_1} = 35\Omega$$

b) Po definiciji, temperaturni koeficijent otpornosti (za male promene temperature) je

$$\alpha_R = \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dT}$$

Za PTC otpornik je

$$\alpha_{PTC} = \frac{C \cdot B \cdot e^{BT}}{R_{PTC}}$$

a prema poslednjem izrazu, na temperaturi T_2=70^{o}C=343K on iznosi

$$\alpha_{PTC} = 16.823 \times 10^{-3} K^{-1}$$

c) Ekvivalentni temperaturni koeficijent paralelne veze dva otpornika je

$$\alpha_e = \frac{\alpha_1 R_2 + \alpha_2 R_1}{R_1 + R_2}$$

Na temperaturi 70^{o}C otpornik koji se paralelno vezuje PTC otporniku ima otpornost

$$R = R_{20}(1 + \alpha_R \cdot \Delta T) = 180\Omega$$

pa je ekvivalentni temperaturni koeficijent

$$\alpha_e = \frac{16.823 \times 10^{-3} \cdot 180 - 2 \times 10^{-3} \cdot 70}{70 + 180} = 11.552 \times 10^{-3} K^{-1}$$

ZADATAK 10: Struja varistora pri naponu na njemu U₁=100V iznosi I₁=1mA, a pri naponu U₂=120V je I₂=1A. Kolike su statičke i dinamičke otpornosti varistora pri tim naponima?

....

Rešenje:

Varistor je nelinearni otpornik čija strujno-naponska karakteristika pokazuje linearnu zavisnost u logaritamskom koordinatnom sistemu (*logI=f(logU)*) i može se opisati izrazom

$$I = k \cdot U^{\beta}$$

Statička otpornost je jednostavno količnik jednosmernog napona i jednosmerne struje na krajevima komponente. Dakle,

$$R_{V1} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{100V}{1\times 10^{-3}A} = 100k\Omega \qquad R_{V2} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{120V}{1A} = 120\Omega$$

Dinamička otpornost je odnos malih priraštaja napona i malih priraštaja struje

$$r_V = \frac{\Delta U_V}{\Delta I_V} \approx \frac{dU_V}{dI_V} = \frac{1}{\dfrac{dI_V}{dU_V}}$$

Da bismo našli odgovarajući izvod struje po naponu potrebno je najpre definisati strujno-naponsku karakteristiku, odnosno odrediti njena dva parametra *k* i *β*. Iz sistema od dve jednačine

$$I_1 = k \cdot U_1^{\beta} = 1mA$$

$$I_2 = k \cdot U_2^{\beta} = 1A$$

lako dobijamo

$$\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^{\beta} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\log\dfrac{I_2}{I_1}}{\log\dfrac{U_2}{U_1}} = \frac{\log 1000}{\log 1.2} = 37.888$$

$$k = \frac{I_1}{U_1^{\beta}} = \frac{10^{-3}}{100^{37.888}} = 10^{-78.776} = 1.67\times 10^{-79}\ [A]$$

Sada se dinamička otpornost može izraziti kao

$$r_V = \frac{1}{\dfrac{dI_V}{dU_V}} = \frac{1}{k\cdot\beta\cdot U_V^{\beta-1}} = \frac{U_V}{k\cdot\beta\cdot U_V^{\beta}} = \frac{U_V}{\beta\cdot I_V} = \frac{R_V}{\beta}$$

pa konkretne vrednosti iznose

$$r_{V1} = \frac{R_{V1}}{\beta} = \frac{100k\Omega}{37.888} = 2.64\ k\Omega \qquad r_{V2} = \frac{R_{V2}}{\beta} = 3.167\ \Omega$$

ZADATAK 11: NTC otpornik, temperaturne osetljivosti B=1800 K, ima na temperaturi T=300 K otpornost R=1 kΩ. Kada se ovaj NTC otpornik redno veže sa kondenzatorom kapacitivnosti C=100 nF, moduo impedanse takve redne veze pri učestanosti ω=10^3 rad/s temperaturno je stabilan u okolini temperature 300K. Odrediti pri kojoj će učestanosti biti temperaturno stabilan moduo impedanse paralelne veze ovog NTC otpornika i datog kondenzatora u istom temperaturnom opsegu.

....

Rešenje:

Kvadrat modula impedanse redne veze otpornika i kondenzatora je

$$|Z|^2 = R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}$$

Kako je moduo impedanse temperaturno stabilan, to je očigledno da je kapacitivnost temperaturno zavisna. Diferenciranjem gornjeg izraza po temperaturi dobijamo

$$2|Z| \cdot \frac{d|Z|}{dT} = 2R \cdot \frac{dR}{dT} - \frac{2}{\omega^2 C^3} \cdot \frac{dC}{dT}$$

odnosno

$$2|Z|^2 \cdot \alpha_{|Z|} = 2R^2 \cdot \alpha_R - \frac{2}{\omega^2 C^2} \cdot \alpha_C$$

gde su po definiciji temperaturni koeficijenti

$$\alpha_{|Z|} = \frac{1}{|Z|} \cdot \frac{d|Z|}{dT} \qquad \alpha_R = \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dT} \qquad \alpha_C = \frac{1}{C} \cdot \frac{dC}{dT}$$

Kako je moduo impedanse temperaturno stabilan, to je

$$\alpha_{|Z|} = 0 \qquad \rightarrow \qquad R^2 \cdot \alpha_R - \frac{\alpha_C}{\omega^2 C^2} = 0$$

Kod NTC otpornika je zavisnost otpornosti od temperature data sa

$$R(T) = R_\infty \cdot \exp\left(\frac{B}{T}\right) \qquad \rightarrow \qquad \alpha_R = -\frac{B}{T^2}$$

α_R za NTC otpornik očigledno zavisi od temperature. U okolini T=300 K temperaturni koeficijent NTC otpornika iznosi

$$\alpha_R = -\frac{1800}{300^2} = -2 \times 10^{-2} K^{-1}$$

Sada je temperaturni koeficijent kondenzatora

$$\alpha_C = \omega^2 R^2 C^2 \cdot \alpha_R = -2 \times 10^{-4} K^{-1}$$

Moduo impedanse paralelne veze će biti temperaturno stabilan na istoj temperaturi i istoj učestanosti na kojoj je moduo admitanse temperaturno stabilan. Dakle, uslov $\alpha_{|Z|} = 0$ biće ekvivalentan uslovu $\alpha_{|Y|} = 0$, ali je razmatranje admitanse u ovom slučaju matematički jednostavnije. Kvadrat modula admitanse paralelne veze otpornika i kondenzatora je

$$|Y|^2 = \omega^2 C^2 + \frac{1}{R^2}$$

Diferenciranjem po temperaturi dobijamo

$$2|Y|\cdot\frac{d|Y|}{dT}=2\omega^2 C\cdot\frac{dC}{dT}-\frac{2}{R^3}\cdot\frac{dR}{dT}$$

$$2|Y|^2\cdot\alpha_{|Y|}=2\omega^2 C^2\cdot\alpha_C-\frac{2}{R^2}\cdot\alpha_R$$

Iz uslova $\alpha_{|Y|}=0$ dobijamo

$$\omega^2 C^2\cdot\alpha_C=\frac{\alpha_R}{R^2}$$

odakle je tražena učestanost

$$\omega=\frac{1}{RC}\cdot\sqrt{\frac{\alpha_R}{\alpha_C}}=10^5 rad/s$$

ZADATAK 12: Tubasti kondenzator dobijen je namotavanjem metalnih folija debljine δ=10 μm i dielektričnih folija sledećih karakteristika

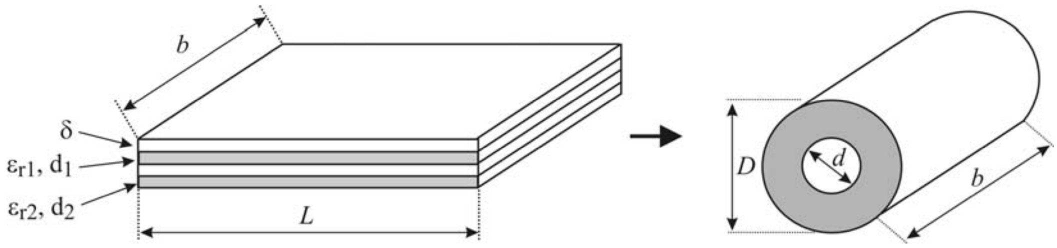
	debljina [μm]	ρ [Ωm]	ε_r
I folija	**15**	**2x10^{14}**	**3.6**
II folija	**20**	**10^{14}**	**2.5**

Folije su motane na cilindrično telo prečnika 4 mm i dužine 2.5 cm, tako da formirani kondenzator ima prečnik 1.5 cm. Ako je kondenzator bio priključen na napon 6V i ostavljen da se slobodno prazni, odrediti posle kog vremena će količina naelektrisanja na njemu biti 1 μC.

....

Rešenje:

Motaju se dve metalne folije (dve elektrode kondenzatora) i dve dielektrične folije, kao na slici. Pri tome, usled namotavanja folija prečnik cilindra *d* naraste na vrednost *D*.

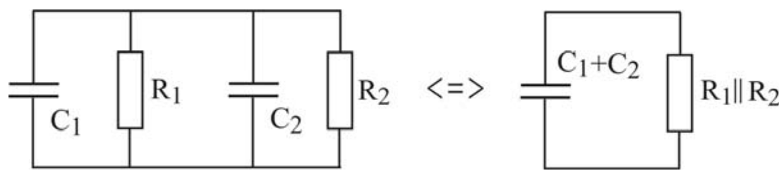


Izjednačavanjem zapremina „umotanog“ materijala dobijamo

$$L \cdot b \cdot (2\delta + d_1 + d_2) = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \cdot b$$

$$L = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4(2\delta + d_1 + d_2)} = 298.5\ cm \qquad \text{(dužina folija)}$$

Ekvivalentnu šemu ovog kondenzatora možemo predstaviti paralelnom vezom dva kondenzatora



Kapacitivnost ovog kondenzatora je

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \frac{bL}{d_1} + \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \frac{bL}{d_2} = \varepsilon_0 bL \left(\frac{\varepsilon_{r1}}{d_1} + \frac{\varepsilon_{r2}}{d_2} \right) = 241.12\ nF$$

a otpornost izolacije

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{bL}{\rho_1 d_1} + \frac{bL}{\rho_2 d_2} = \frac{bL(\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2)}{\rho_1 \rho_2 d_1 d_2}$$

$$R = \frac{\rho_1 \rho_2 d_1 d_2}{bL(\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2)} = 16.086 \times 10^9\ \Omega$$

Vremenska konstanta kondenzatora je sada

$$\tau = R \cdot C = 3878\ s$$

Ako je kondenzator bio priključen na napon U, na njegovim oblogama biće naelektrisanje $Q_0 = C \cdot U$, koje će se u toku spontanog pražnjenja smanjivati po eksponencijalnom zakonu sa vremenskom konstantom τ

$$Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = CU \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

odakle je

$$t = \tau \cdot \ln\frac{CU}{Q(t)} = 3878 \cdot \ln\frac{6 \cdot 241.12 \times 10^{-9}}{10^{-6}} = 1432\ s \approx 24\ \text{min}$$

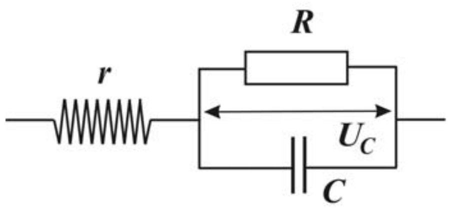
ZADATAK 13: Dat je realni kondenzator.

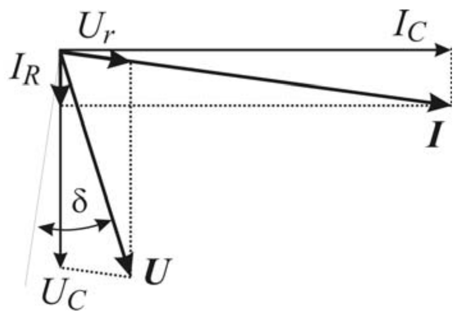
a) **Nacrtati ekvivalentnu šemu, fazorski dijagram napona i struja i izvesti izraz za *tg*δ.**
b) **Ako su donja i gornja granična frekvencija kondenzatora f_{1g}=10 Hz i f_{2g}=10 MHz, odrediti koliko iznosi frekvencija na kojoj *tg*δ ima minimalnu vrednost i odrediti kolika je ta vrednost.**

....

Rešenje:

Realni kondenzator ima dielektrik koji i pored velike otpornosti ipak neznatno provodi struju, tako da dolazi do oticanja naelektrisanja sa obloga kondenzatora kroz ovaj dielektrik. U ekvivalentnoj šemi neidealnost dielektrika se predstavlja velikim paralelnim otpornikom **R** (reda MΩ ili više). Pored toga, na vrlo visokim učestanostima impedansa kondenzatora nije jednaka nuli zbog redne otpornosti kontakata i izvoda, što se u ekvivalentnoj šemi predstavlja malim rednim otpornikom ***r*** (reda Ω ili manje). Ova se otpornost često naziva ESR (*Equivalent Serial Resistance*). Dakle, idealno je $r = 0,\ R \to \infty$, a realno je $r > 0,\ R < \infty$. U zavisnosti od toga kako se otpornik *r* vezuje, razlikujemo dve ekvivalentne šeme. Razmotrimo sledeću šemu





Impedansa ekvivalentne šeme je

$$Z = r + \frac{\frac{R}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = r + \frac{R}{1 + j\omega RC} = r + \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} - j\frac{\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

Napon na impedansi se može izraziti kao

$$U = Z \cdot I = \mathrm{Re}\{Z\} \cdot I + j\,\mathrm{Im}\{Z\} \cdot I$$

Odavde je $tg\delta$ tangens ugla izmedju komponente napona koja je u fazi sa strujom i komponente napona koja kasni za π/2, tj.

$$tg\delta = \frac{\mathrm{Re}\{Z\}}{-\mathrm{Im}\{Z\}} = \frac{r + \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2}}{\frac{\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \frac{r + \omega^2 R^2 C^2 r + R}{\omega R^2 C} = \frac{r}{\omega R^2 C} + \omega r C + \frac{1}{\omega RC}$$

Kako je redna otpornost *r* obično mala, a paralelna otpornost *R* velika, to se prvi član može zanemariti, pa se za $tg\delta$ dobija približan izraz

$$tg\delta = \omega r C + \frac{1}{\omega RC}$$

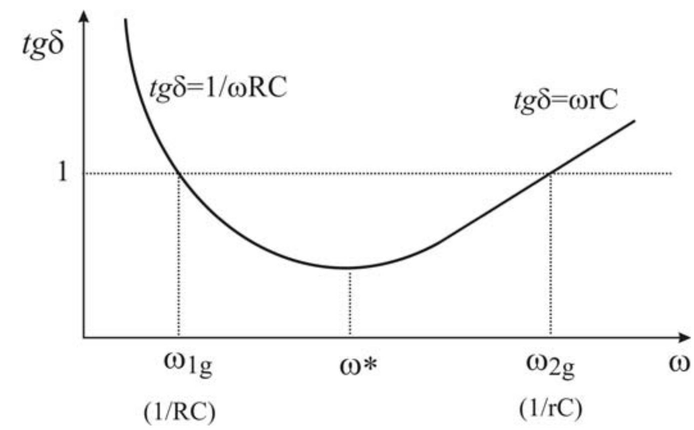
Na niskim učestanostima je impedansa kondenzatora velika, te se mali otpornik *r* „ne vidi“ i može se zanemariti, pa je tada

$$tg\delta \approx \frac{1}{\omega RC}$$

S druge strane, na vrlo visokim učestanostima mala impedansa kondenzatora „premošćava“ otpornik R, te se on „izbacuje“ iz šeme i tada je

$$tg\delta \approx \omega rC$$

Zavisnost $tg\delta$ od učestanosti prikazana je na sledećoj slici



Granične učestanosti se dobijaju za slučaj kada je $tg\delta = 1$. Za vrednosti $tg\delta$ veće od 1 impedansa sve manje ima kapacitivni, a sve više otporni karakter. Dakle, za granične učestanosti dobijamo

$$\frac{1}{\omega_{1g} RC} = 1 \quad \rightarrow \quad \omega_{1g} = \frac{1}{RC}, \qquad f_{1g} = \frac{1}{2\pi RC}$$

$$\omega_{2g} rC = 1 \quad \rightarrow \quad \omega_{2g} = \frac{1}{rC}, \qquad f_{2g} = \frac{1}{2\pi rC}$$

Diferenciranjem izraza za $tg\delta$ po učestanosti dobijamo učestanost na kojoj $tg\delta$ ima minimum

$$\frac{dtg\delta}{d\omega} = rC - \frac{1}{\omega^2 RC} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \omega^* = \frac{1}{C\sqrt{rR}}$$

a zamenom ω* u izraz za $tg\delta$ odredjujemo i koliko ta minimalna vrednost iznosi

$$tg\delta_{\min} = \omega^* rC + \frac{1}{\omega^* RC} = \frac{1}{C\sqrt{rR}} rC + \frac{C\sqrt{rR}}{RC} = 2\sqrt{\frac{r}{R}}$$

Na osnovu gornjih izraza se lako može zaključiti da izmedju izvedenih veličina postoji veza

$$\omega^* = \sqrt{\omega_{1g}\omega_{2g}} \qquad \rightarrow \qquad f^* = \sqrt{f_{1g} f_{2g}}$$

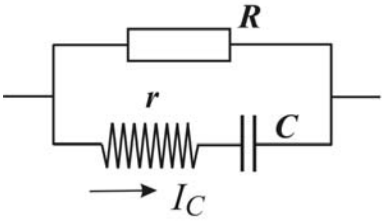
$$tg\delta_{\min} = 2\sqrt{\frac{\omega_{1g}}{\omega_{2g}}} = 2\sqrt{\frac{f_{1g}}{f_{2g}}}$$

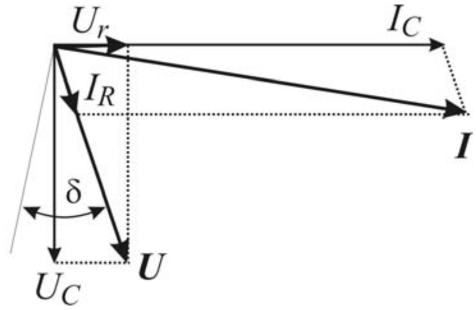
Koristeći vrednosti graničnih frekvencija iz zadatka konačno dobijamo

$$f^* = \sqrt{f_{1g} f_{2g}} = \sqrt{10 \cdot 10 \times 10^6} = 10\ kHz$$

$$tg\delta_{\min} = 2\sqrt{\frac{f_{1g}}{f_{2g}}} = 2\sqrt{\frac{10}{10 \times 10^6}} = 2 \times 10^{-3}$$

Ekvivalentna šema kondenzatora se može formirati i na drugi način (kao na narednoj slici), pa će i fazorski dijagram biti neznatno izmenjen.





Impedansa je u tom slučaju

$$Z=\frac{R\cdot\left(r+\frac{1}{j\omega C}\right)}{R+\left(r+\frac{1}{j\omega C}\right)}=\frac{R\cdot\frac{1+j\omega rC}{j\omega C}}{\frac{1+j\omega(r+R)C}{j\omega C}}=\frac{R\cdot(1+j\omega rC)}{1+j\omega(r+R)C}$$

odnosno

$$Z=\frac{R\cdot(1+j\omega rC)}{1+j\omega(r+R)C}\cdot\frac{1-j\omega(r+R)C}{1-j\omega(r+R)C}=\frac{R+\omega^2 rR(r+R)C^2}{1+\omega^2(r+R)^2C^2}-j\frac{\omega R^2C}{1+\omega^2(r+R)^2C^2}$$

Pa se za $tg\delta$ dobija

$$tg\delta=\frac{\mathrm{Re}\{Z\}}{-\mathrm{Im}\{Z\}}=\frac{R+\omega^2 rR(r+R)C^2}{\omega R^2C}=\frac{1}{\omega RC}+\omega\frac{r^2}{R}C+\omega rC$$

U poslednjem izrazu se srednji član na desnoj strani može zanemariti (s obzirom da je *r* malo, a *R* veliko), pa se praktično dobija isti rezultat kao i u prethodnom izvodjenju.

ZADATAK 14: U jednom oscilatornom kolu, koje radi na učestanosti f=100 kHz, upotrebljen je kondenzator kapacitivnosti 100 nF i temperaturnog koeficijenta $\alpha_C = -2\times 10^{-4} K^{-1}$. Odrediti induktivnost kalema u ovom kolu i njegov temperaturni koeficijent, ako se zna da je učestanost ovog oscilatornog kola temperaturno stabilna.

....

Rešenje:

Iz izraza za učestanost oscilatornog kola odredjujemo vrednost induktivnosti

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad \Rightarrow \qquad L = \frac{1}{(2\pi f)^2 C} = 25.33\ \mu H$$

Uslov temperaturne stabilizacije najelegantnije se izvodi polazeći od logaritma kružne učestanosti

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = (LC)^{-1/2}$$

$$\ln\omega = -\frac{1}{2}(\ln L + \ln C)$$

Diferenciranjem leve i desne strane po temperaturi dobijamo

$$\frac{1}{\omega}\cdot\frac{d\omega}{dT} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{L}\cdot\frac{dL}{dT} + \frac{1}{C}\cdot\frac{dC}{dT}\right)$$

$$\alpha_\omega = -\frac{1}{2}(\alpha_L + \alpha_C)$$

Uslov da je učestanost temperaturno stabilna $\alpha_\omega = 0$ praktično se svodi na

$$\alpha_L = -\alpha_C = 2\times 10^{-4} K^{-1}$$

ZADATAK 15: Sistem za kontrolu unošenja metalnih predmeta na aerodromima i bankama ima kalem čija se induktivnost poveća za 2% kada kroz kapiju prodje čovek sa metalnim satom. Kolika bi trebalo da iznosi osnovna učestanost kola pa da se ovaj prolazak detektuje u vidu apsolutne promene učestanosti od 2 kHz.

....

Rešenje:

Osnovna učestanost oscilatornog kola bi bila

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0 C}}$$

Učestanost sa uvećanom induktivnošču kada je detektovan metalni predment je

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_0 + \Delta L)C}} = f_0 - \Delta f$$

Iz odnosa ovih učestanosti imaćemo

$$\frac{f_0}{f_1} = \frac{f_0}{f_0 - \Delta f} = \sqrt{\frac{L_0 + \Delta L}{L_0}} = \sqrt{1.02}$$

odnosno

$$\frac{f_0 - \Delta f}{f_0} = 1 - \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{\sqrt{1.02}} = 0.99015$$

odakle je

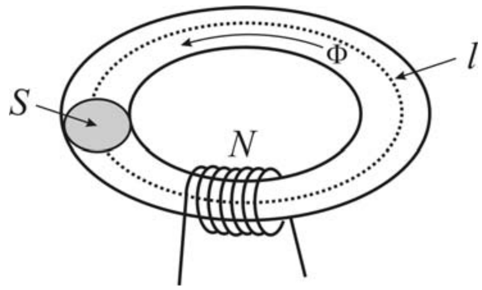
$$\frac{\Delta f}{f_0} = 0.00985 \quad \Rightarrow \quad f_0 = \frac{\Delta f}{0.00985} = 101.5 \cdot 2kHz = 203\ kHz$$

ZADATAK 16: Kalem je namotan na tanko torusno jezgro koje zatvara linije magnetnog polja, tako da nema gubitaka magnetnog fluksa. Površina preseka jezgra je *S=1 cm²*, srednja dužina linija magnetnog polja *l=30 cm*, a relativna magnetna propustljivost jezgra μ_r=400. Magnetna propustljivost vakuuma je $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$. Odrediti induktivnost kalema ako je na jezgru namotano:

a) **N_1=100 namotaja**
b) **N_2=200 namotaja**
c) **N_3=N_1+N_2=300 namotaja .**

....

Rešenje:



Iz Amperovog zakona za cirkulaciju vektora magnetnog polja dobijamo

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = \sum I \quad \rightarrow \quad H \cdot l = NI \quad \rightarrow \quad H = \frac{NI}{l}$$

Magnetna indukcija u jezgru i fluks po jednom zavojku iznosiće

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{l} \qquad \Phi = B \cdot S = \mu_0 \mu_r \frac{S \cdot NI}{l}$$

Ukupan fluks koji obuhvata N zavojaka i induktivnost L biće sada

$$\Psi = N \cdot \Phi = \mu_0 \mu_r \frac{S \cdot N^2 I}{l} \qquad L \stackrel{def}{=} \frac{\Psi}{I} = \mu_0 \mu_r \frac{S \cdot N^2}{l}$$

Induktivnosti redom iznose

$$L_1 = \mu_0 \mu_r \frac{S \cdot N_1^2}{l} = 4\pi \times 10^{-7} \cdot 400 \frac{1 \times 10^{-4} \cdot 100^2}{30 \times 10^{-2}} = 1.6755\ mH$$

$$L_2 = \mu_0 \mu_r \frac{S \cdot N_2^2}{l} = 6.702\ mH$$

$$L_3 = \mu_0 \mu_r \frac{S \cdot N_3^2}{l} = 15.079\ mH$$

Odavde se mogu izvesti dva vrlo važna zaključka:

1) Induktivnosti rastu sa kvadratom broja zavojaka.
2) Rednim vezivanjem dva kalema (N_3=N_1+N_2) dobija se induktivnost koja je veća od zbira induktivnosti L_1+L_2. Ovo se dešava kada su kalemovi spregnuti preko fluksa i tada izmedju njih postoji i medjusobna induktivnost njihove sprege M. Kalemovi bez jezgra osim što imaju manju induktivnost, imaju veće rasipanje magnetnog fluksa i osetljiviji su na spoljašnje uticaje (metalni predmeti u njihovoj blizini).

ZADATAK 17: Koristeći podatke iz prethodnog zadatka odrediti:

a) **Faktor induktivnosti A_L torusnog jezgra**

d) **Koeficijent medjusobne induktivnosti izmedju kalema L_1 (namotanog sa 100 zavojaka) i kalema L_2 (namotanog sa 200 zavojaka), ako se oni nalaze na istom jezgru.**

....

Rešenje:

a) Pokazano je da se kod kalemova induktivnost povećava sa kvadratom broja zavojka

$$L \sim N^2$$

Koeficijent koji stoji ispred člana N^2 je tzv. faktor induktivnosti A_L

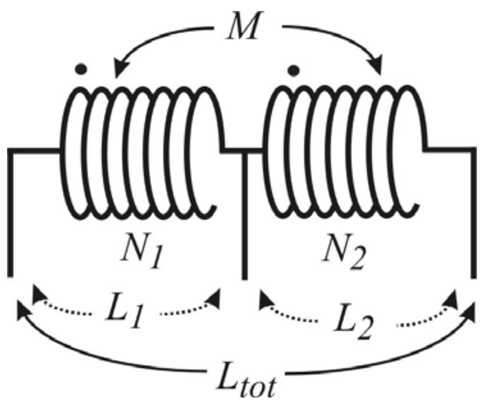
$$L = A_L \cdot N^2$$

Za torusno jezgro iz prethodnog zadatka se dobija

$$A_L = \mu_0 \mu_r \frac{S}{l} = 4\pi \times 10^{-7} \cdot 400 \frac{1 \times 10^{-4}}{30 \times 10^{-2}} = 167.55\ nH$$

i A_L-vrednost jednostavno bi se izražavala kao A_L=167.55, gde se podrazumeva da je jedinica nH.

b) Kod spregnutih kalemova je ukupna induktivnost



$$L_{tot} = L_1 + M + L_2 + M = L_1 + L_2 + 2M$$

gde je medjusobna induktivnost

$$M = k\sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

U našem slučaju je $L_1 = 1.6755\ mH$,

$L_2 = 6.702\ mH$ i $L_{tot} = L_3 = 15.079\ mH$.,

pa je

$$M = \frac{1}{2}(L_{tot} - L_1 - L_2) = 3.35075\ mH$$

Konačno, koeficijent sprege je sada

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} = \frac{3.35075}{\sqrt{1.6755 \cdot 6.702}} = 1$$

Dakle, kalemovi su u idealnoj sprezi jer nema gubitaka magnetnog fluksa (fluks jednog kalema je kompletno obuhvaćen zavojcima drugog kalema). Ovo je zbog toga što magnetni materijal jezgra kompletno vodi linije magnetnog polja. Kod kalemova bez jezgra ovo neće biti slučaj i tamo je koeficijent sprege manji od 1.

ZADATAK 18: Na cilindrično kalemsko telo od nemagnetnog materijala prečnika *D=4 cm* namotan je tankom žicom debljine *0.1 mm* sloj namotaja ukupne dužine *l=2 cm*, pri čemu je tačno na sredini izmedju krajeva namotaja izvučen srednji izvod. Primenom empirijskog izraza za induktivnost kratkih cilindričnih jednoslojnih kalemova

$$L = 2.26 \times 10^{-2} \frac{d_0 N^2}{1 + 2.25 \dfrac{l}{d_0}} \quad [\mu H]$$

odrediti koeficijent sprege izmedju ove dve polovine kalema.

....

Rešenje:

Označimo li krajeve kalema sa (1) i (3), a srednji izvod sa (2) imaćemo za ukupnu induktivnost kalema

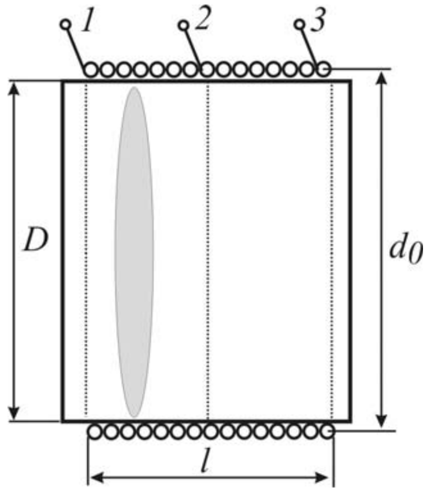
$$L_{13} = L_{12} + L_{23} + 2M = 2L_{12} + 2M$$

gde je medjusobna induktivnost

$$M = k\sqrt{L_{12}L_{23}} = k \cdot L_{12}$$

Dakle, koeficijent sprege je

$$k = \frac{M}{L_{12}} = \frac{L_{13} - 2L_{12}}{2L_{12}} = \frac{L_{13}}{2L_{12}} - 1$$



Očigledno, treba odrediti induktivnost polovine kalema L_{12} i induktivnost celog kalema L_{13}. Ukupan broj zavojaka je

$$N_{13} = \frac{l}{d_{zice}} = \frac{2\ cm}{0.1\ mm} = 200\ zavojaka$$

Srednji prečnik kalema je

$$d_0 = D + 2 \cdot \frac{d_{zice}}{2} = D + d_{zice} = 4cm + 0.1mm \approx 4\ cm$$

pa je induktivnost

$$L_{13} = 2.26 \times 10^{-2} \frac{d_0 N_{13}^2}{1 + 2.25 \dfrac{l}{d_0}} = 2.26 \times 10^{-2} \frac{4 \cdot 200^2}{1 + 2.25 \cdot \dfrac{2}{4}} = 1702\ \mu H$$

Polovina kalema induktivnosti L_{12} imaće isti srednji prečnik $d_0=4\ cm$, ali upola manje zavojaka ($N_{12}=100$) i upola manju dužinu ($l=1\ cm$). Zbog toga će njegova induktivnost biti

$$L_{12} = 2.26 \times 10^{-2} \frac{4 \cdot 100^2}{1 + 2.25 \cdot \dfrac{1}{4}} = 579\ \mu H$$

Konačno, traženi koeficijent sprege je

$$k = \frac{L_{13}}{2L_{12}} - 1 = \frac{1702}{2 \cdot 579} - 1 = 0.47$$

ZADATAK 19: Korišćenjem empirijskog izraza za induktivnost kratkih cilindričnih jednoslojnih kalemova

$$L = 2.26\times10^{-2}\frac{d_0N^2}{1+2.25\dfrac{l}{d_0}} \quad [\mu H]$$

gde su srednji prečnik *d_0* i dužina kalema *l* u [cm], odrediti induktivnost kalema namotanog tankom žicom debljine *0.1 mm* na kalemsko telo od nemagnetnog materijala prečnika *D=3 cm,* ako sloj namotaja čini 40 zavojaka motanih u jednom smeru, a zatim 60 zavojaka motanih u suprotnom smeru.

....

Rešenje:

Kalem se praktično sastoji iz dva kalema, L_1 (sa 40 zavojaka) i L_2 (sa 60 zavojaka) koji su zbog blizine u sprezi, pa je ukupna induktivnost izmedju krajeva

$$L = L_1 - M + L_2 - M = L_1 + L_2 - 2M$$

gde je M medjusobna induktivnost. Srednji prečnik oba kalema je isti i iznosi

$$d_0 = D + d_{zice} = 3cm + 0.1mm \approx 3\ cm$$

a dužine kalemova

$$l_1 = N_1\cdot d_{zice} = 40\cdot 0.01 = 0.4\ cm \qquad\qquad l_1 = N_2\cdot d_{zice} = 0.6\ cm$$

Induktivnosti kalemova su sada

$$L_1 = 2.26\times10^{-2}\frac{d_0N_1^2}{1+2.25\dfrac{l_1}{d_0}} = 2.26\times10^{-2}\frac{3\cdot40^2}{1+2.25\dfrac{0.4}{3}} = 83.45\ \mu H$$

$$L_2 = 2.26\times10^{-2}\frac{d_0N_2^2}{1+2.25\dfrac{l_2}{d_0}} = 2.26\times10^{-2}\frac{3\cdot60^2}{1+2.25\dfrac{0.6}{3}} = 168.33\ \mu H$$

Da su oba kalema motana u istom smeru, ukupna induktivnost bila bi

$$L_{tot} = 2.26\times10^{-2}\frac{d_0(N_1+N_2)^2}{1+2.25\dfrac{(l_1+l_2)}{d_0}} = 2.26\times10^{-2}\frac{3\cdot100^2}{1+2.25\dfrac{1}{3}} = 387.43\ \mu H$$

što znači da se medjusobna induktivnost tada može odrediti iz

$$L_{tot} = L_1 + L_2 + 2M$$

i iznosi

$$2M = L_{tot} - L_1 - L_2 = 387.43 - 83.45 - 168.33 = 135.65\ \mu H$$

Konačno, tražena induktivnost za kalem čiji su zavojci motani u oba smera iznosi

$$L = L_1 + L_2 - 2M = 83.45 + 168.33 - 135.65 = 116.13\ \mu H$$

ZADATAK 20: Namotaj jednoslojnog cilindričnog kalema čine 120 zavojaka tanke bakarne žice (debljine *0.1 mm,* specifične otpornosti ρ=0.017 *Ωmm²/m*) tako da je srednji prečnik zavojaka *d₀*=2cm. Korišćenjem empirijskog izraza za induktivnost ovakvih kalemova

$$L = 2.26\times10^{-2}\frac{d_0N^2}{1+2.25\frac{l}{d_0}} \quad [\mu H]$$

gde su d_0 i l u [cm], odrediti Q-faktor ovog kalema na učestanosti f=10 kHz.

Kada se ovaj kalem ubaci u lončasto jezgro čija je A_L vrednost 320, izmerena vrednost Q-faktora takvog kalema na učestanosti f=10 kHz iznosi Qj=4.8. Odrediti ekvivalentnu otpornost gubitaka u materijalu jezgra.

....

Rešenje:

Na osnovu gornjih podataka, dužina kalema je

$$l = N\cdot d_{zice} = 120\cdot 0.01 = 1.2\ cm$$

pa je njegova induktivnost

$$L = 2.26\times10^{-2}\frac{d_0N^2}{1+2.25\frac{l}{d_0}} = 2.26\times10^{-2}\frac{2\cdot120^2}{1+2.25\frac{1.2}{2}} = 277\ \mu H$$

Dužina upotrebljene žice za namotavanje kalema je

$$l_{zice} = N\cdot d_0\pi = 7.54\ m$$

a njena omska otpornost

$$R_0 = \rho\frac{l_{zice}}{S_{zice}} = \rho\frac{4l_{zice}}{\pi\cdot d_{zice}^2} = 0.017\frac{4\cdot7.54}{\pi\cdot0.1^2} = 16.32\ \Omega$$

Q-faktor kalema bez jezgra na učestanosti f iznosi

$$Q = \frac{\omega L}{R_0} = \frac{2\pi f\cdot L}{R_0} = \frac{2\pi\cdot10^4\cdot277\times10^{-6}}{16.32} = 1.066$$

Kada se kalem ubaci u lončasto jezgro sa A_L vrednošću 320 (podrazumeva se da je jedinica nH), induktivnost je tada

$$L_j = A_L\cdot N^2 = 320\cdot10^{-9}\cdot120^2 = 4608\ \mu H$$

Q-faktor kalema sa jezgrom odredjuje omska otpornost žice R_0 i otpornost gubitaka u jezgru R_j

$$Q_j = \frac{\omega L_j}{R_{tot}} = \frac{2\pi f\cdot L_j}{R_0+R_j} = 4.8$$

Odavde se za ekvivalentnu otpornost gubitaka u jezgru (histerezisni, remanentni gubici, gubici usled vihornih struja) dobija

$$R_j = \frac{2\pi f\cdot L_j}{Q_j} - R_0 = \frac{2\pi\cdot10^4\cdot4608\times10^{-6}}{4.8} - 16.32 = 44\ \Omega$$

ZADATAK 21: Data su dva potpuno identična višeslojna kalema bez jezgra, unutrašnjeg prečnika d=4 cm, spoljašnjeg prečnika D=6 cm, i dužine *l*=12mm. Korišćenjem Vilerovog obrasca za induktivnost kratkih cilindričnih višeslojnih kalemova

$$L = 78.7\times10^{-3}\,\frac{d_0^2N^2}{3d_0+9l+10h}\quad[\mu H]$$

gde su d_0, l i h u [cm], odrediti:

a) Koliko maksimalno može da iznosi koeficijent sprege izmedju ovih kalemova

b) Induktivnost ovih kalemova, ako je izmereni prečnik izolovane žice 0.4mm.

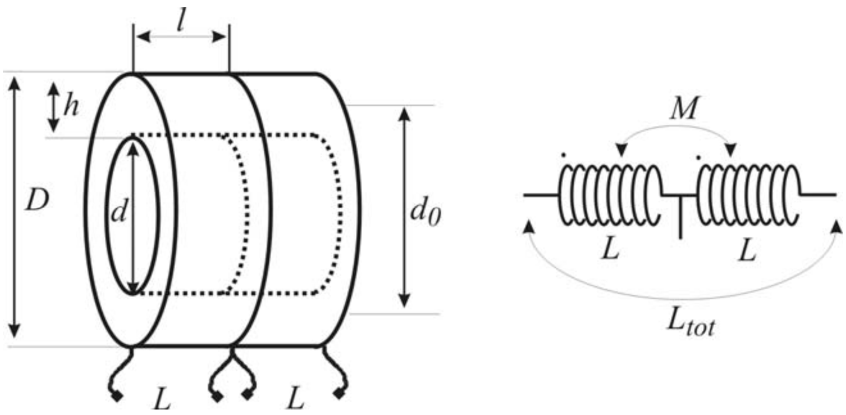
....

Rešenje:

Koeficijent sprege k izmedju kalemova definiše se na osnovu njihove medjusobne induktivnosti M

$$M = k\sqrt{L_1L_2} = k\cdot L$$

Maksimalni koeficijent sprege se dobija kada jedan kalem maksimalno obuhvata fluks drugog kalema, što se može postići kada se kalemovi postave jedan pored drugog (kao na slici). Tada se oni mogu razmatrati kao jedinstven kalem istog srednjeg prečnika d_0, iste visine namotaja h, ali dvostruke dužine l i dvostrukog broja zavojaka.



Tada je ukupna induktivnost

$$L_{tot} = 2L + 2M = 2L\cdot(1+k)$$

a koeficijent sprege

$$k = \frac{L_{tot}}{2L} - 1$$

Na osnovu raspoloživih dimenzija, visina namotaja i srednji prečnik kalemova iznose

$$h = \frac{D-d}{2} = 1\,cm \qquad\qquad d_0 = d + h = 5\,cm$$

Induktivnost jednog kalema i induktivnost dva vezana kalema mogu se izraziti kao

$$L = 78.7\times10^{-3}\,\frac{5^2N^2}{3\cdot5+9\cdot1.2+10\cdot1} = 78.7\times10^{-3}\,\frac{25\cdot N^2}{35.8} = a\cdot\frac{N^2}{35.8}$$

$$L_{tot} = 78.7\times10^{-3}\,\frac{5^2(2N)^2}{3\cdot5+9\cdot2.4+10\cdot1} = 78.7\times10^{-3}\,\frac{25\cdot4N^2}{46.6} = a\cdot\frac{4N^2}{46.6}$$

Sada se jednostavno odredjuje koeficijent sprege

$$k = \frac{L_{tot}}{2L} - 1 = \frac{a \cdot \dfrac{4N^2}{46.6}}{2\left(a \cdot \dfrac{N^2}{35.8}\right)} - 1 = \frac{2 \cdot 35.8}{46.6} - 1 = 0.536$$

Smatrajući da pri motanju kalema ne dolazi do preklapanja slojeva žice, površina preseka namotaja može se izraziti preko broja zavojaka

$$l \cdot h = N \cdot d_{zice}^2 \qquad \rightarrow \qquad N = \frac{l \cdot h}{d_{zice}^2} = \frac{1 \cdot 1.2}{0.04^2} = 750$$

pa je induktivnost jednog kalema

$$L = 78.7 \times 10^{-3} \frac{5^2 \cdot 750^2}{3 \cdot 5 + 9 \cdot 1.2 + 10 \cdot 1} = 30.91\, mH$$

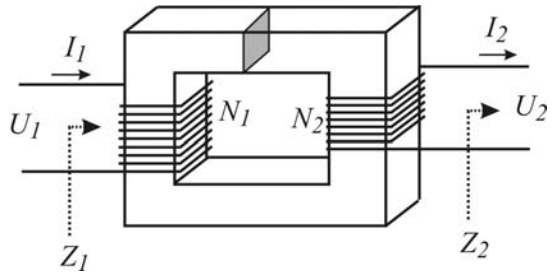
ZADATAK 22: Mrežni transformator ima na primaru N_1=800 zavojaka, a na sekundaru N_2=60 zavojaka. Ako je izlazna struja transformatora I_2=2A, odrediti ulaznu struju i snagu ovog transformatora pretpostavljajući da je on idealan.

Odrediti vrednosti imedansi primara Z_1 i sekundara Z_2 i njihov odnos.

....

Rešenje:

Pošto se radi o mrežnom transformatoru, to znači da je U_1=220 V i f=50 Hz.



Iz odnosa broja zavojaka odredjujemo izlazni napon

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2} \quad \rightarrow \quad U_2 = \frac{N_2}{N_1} U_1 = \frac{60}{800} \cdot 220 = 16.5\,V$$

Izlazna snaga je

$$P_2 = U_2 \cdot I_2 = 16.5V \cdot 2A = 33\,W$$

Ako je transformator idealan (nema gubitaka u jezgru usled vihornih struja i histerezisa) niti gubitaka u namotajima (na otpornostima primara i sekundara), onda je ulazna snaga jednaka izlaznoj, a koeficijent korisnog dejstva η=100%.

$$P_1 = P_2 \quad \rightarrow \quad U_1 \cdot I_1 = U_2 \cdot I_2 \quad \rightarrow \quad I_1 = \frac{U_2}{U_1} I_2 = \frac{N_2}{N_1} I_2 = 150\,mA$$

Impedansa primara je

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{220\,V}{0.15\,A} = 1467\,\Omega$$

Impedansa sekundara je

$$Z_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{16.5\,V}{2\,A} = 8.25\,\Omega$$

Odnos ovih impedansi je

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\frac{U_1}{I_1}}{\frac{U_2}{I_2}} = \frac{U_1}{U_2} \cdot \frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = \left(\frac{800}{60}\right)^2 = 178$$

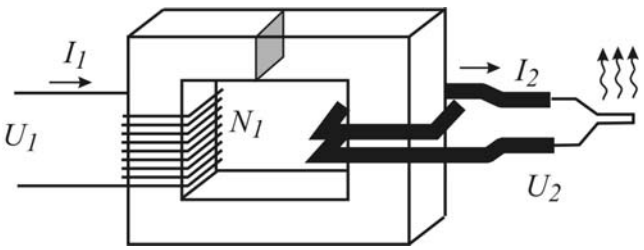
Transformator se, dakle, može iskoristiti za prilagodjenje impedanse.

ZADATAK 23: Pištoljska lemilica snage 75 W napaja se iz mreže. Sekundar transformatora lemilice ima samo dva zavojka od profilisanog debelog bakarnog provodnika koji su kratko spojeni preko tankog provodnika na vrhu lemilice. Ako u primarnom namotaju ima N_1=1100 zavojaka, odrediti izlaznu struju koja zagreva vrh lemilice. Gubitke zanemariti..

....

Rešenje:

Pošto je transformator priključen na mrežu, to znači da je U_1=220 V i f=50 Hz.



Izlazni napon je očigledno mali, jer imamo samo dva zavojka na sekundaru

$$\frac{N_1}{N_2}=\frac{U_1}{U_2} \quad \rightarrow \quad U_2=\frac{N_2}{N_1}U_1=\frac{2}{1100}\cdot 220=0.4\ V$$

Ali je zato struja na sekundaru velika jer se velika ulazna snaga P_1=75 W prenosi sa primara. Ulazna struja je

$$I_1=\frac{P_1}{U_1}=\frac{75\,W}{220\,V}=341\,mA$$

Izlazna struja dobija se iz odnosa

$$N_1\cdot I_1=N_2\cdot I_2 \quad \rightarrow \quad I_2=\frac{N_1 I_1}{N_2}=\frac{1100\cdot 341\,mA}{2}=187\ A$$

Zbog gubitaka u transformatoru, realna struja biće nešto niža.

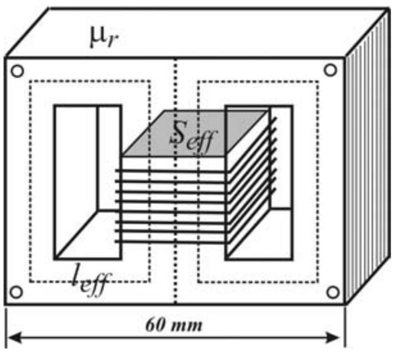
ZADATAK 24: Mrežni transformator ima jezgro od limova EI-60 profila (površina preseka srednjeg stuba S_{eff}=20x20 *mm*^{2}, dužina linija magnetnog polja l_{eff}=120 *mm*, relativna magnetna propustljivost μ_r=2500). Primar je namotan bakarnom žicom (ρ=0.017 *Ωmm*^{2}*/m*) debljine 0.4 *mm* i ima N_1=1200 zavojaka za koje se može proceniti da je srednja dužina jednog zavojka l_{1sr}=120 *mm*. Odrediti:

a) **Maksimalnu snagu i struju primara maksimalno opterećenog transformatora**
b) **Ako je sekundar otvoren, odrediti kolika je struja primara kada je transformator priključen na akumulator od 12V, a kolika kada je priključen na mrežu (~220V).**

....

Rešenje:

Transformator je mrežni, što znači da je U_1=220 V i *f*=50 Hz. Jezgro je od limova EI-60 profila (kao na slici), a namotaji primara i sekundara su na srednjem stubu čiji je poprečni presek kvadratnog oblika dimenzija 20x20 mm. Linije magnetne indukcije dužine 120 mm zatvaraju se preko bočnih stubova.



a) Maksimalna snaga transformatora zavisi od veličine jezgra preko koga se ona prenosi sa primara na sekundar. Iz približne formule

$$S_{eff} = \sqrt{P_2} \quad [cm^2]$$

odredjujemo snagu transformatora

$$P_2 = S_{eff}^2 = 4^2 = 16\,W$$

Pod pretpostavkom da nema gubitaka u transformatoru, odnosno da je $P_1=P_2$=16 W, dobijamo struju primara

$$I_1 = \frac{P_1}{U_1} = \frac{16\,W}{220\,V} = 73\,mA$$

b) Kada je sekundar otvoren (kroz namotaje sekundara ne protiče struja i nema poremećaja fluksa) primar "ne oseća prisustvo sekundara" i ponaša se kao kalem sa jezgrom čija je induktivnost

$$L_1 = A_L \cdot N_1^2 = \mu_0 \mu_r \frac{S_{eff}}{l_{eff}} \cdot N_1^2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2500 \cdot \frac{400 \times 10^{-6}}{120 \times 10^{-3}} \cdot 1200^2 = 15.08\,H$$

Iz ukupne dužine žice upotrebljene za namotavanje primara, odredjujemo otpornost primara

$$l = l_{1sr} \cdot N_1 = 120 \times 10^{-3} \cdot 1200 = 144\,m$$

$$R_1 = \rho \cdot \frac{l}{S} = \rho \cdot \frac{4l}{\pi d_{zice}^2} = 0.017 \frac{4 \cdot 144}{\pi \cdot 0.4^2} = 19.5\,\Omega$$

Ako se transformator priključi na akumulator od 12 V, kroz primar će proticati jednosmerna struja

$$I_1^{(DC)} = \frac{U_1}{R_1} = \frac{12\,V}{19.5\,\Omega} = 615\,mA$$

koja lako može da dovede do pregorevanja primarnog namotaja zbog velike gustine struje kroz izuzetno tanku žicu primara. Ako se pak neopterećen transformator priključi na naizmenični mrežni napon od 220 V, impedansa primara velike induktivnosti

$$|Z_1| = \sqrt{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} = \sqrt{R_1^2 + (2\pi f \cdot L_1)^2} \approx 2\pi f \cdot L_1 = 4735\,\Omega$$

ograničavaće struju primara na vrednost

$$I_1 = \frac{U_1}{2\pi f L_1} = \frac{220\ V}{4735\ \Omega} = 46.5\ mA$$

Snaga gubitaka na omskoj otpornosti primara iznosiće

$$P = R_1 \cdot I_1^2 = 19.5 \cdot 0.0465^2 = 42\ mW$$

što ukazuje da je koeficijent korisnog dejstva transformatora manji od 100%.

ZADATAK 25: Tri mrežna transformatora namotana su na tri identična jezgra. Prvi transformator ima na primaru 600, a na sekundaru 200 zavojaka, drugi na primaru ima 500, a na sekundaru 240 zavojaka, i treći na primaru ima 700, a na sekundaru 300 zavojaka.

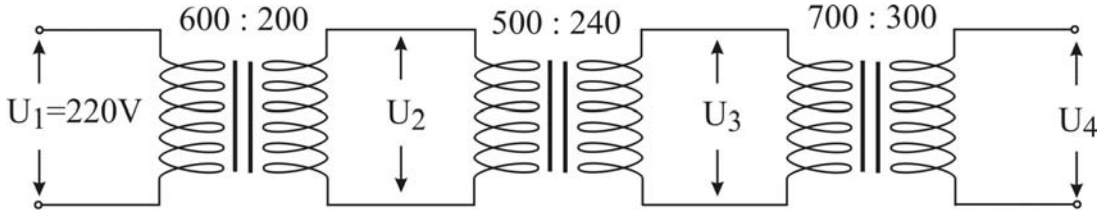
a) Ako se transformatori redno vežu (primar drugog na sekundar prvog) pri čemu se prvi transformator vezuje na mrežni napon od 220 V, koliko će iznositi napon na izlazu.

b) Ako se primari ovih transformatora rednu vežu i priključe na mrežni napon 220 V, koliki će biti napon na redno vezanim sekundarima kroz koje ne teče struja?

....

Rešenje:

a) Za rednu vezu transformatora (kao na slici), izlazni napon dobija se iz odnosa broja zavojaka.

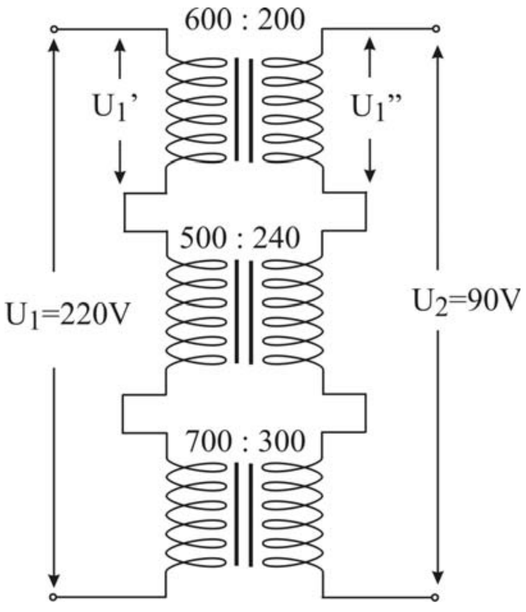


$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{600}{200} \quad \rightarrow \quad U_2 = \frac{200}{600} \cdot U_1 = 73.3\,V$$

$$\frac{U_2}{U_3} = \frac{500}{240} \quad \rightarrow \quad U_3 = \frac{240}{500} \cdot U_2 = 35.2\,V \qquad \rightarrow \quad U_4 = \frac{300}{700} \cdot U_3 = 15.08\,V$$

b) U slučaju redne veze tri primara, doći će do raspodele ulaznog napona od 220V izmedju transformatora, pa je potrebno odrediti koliki ulazni napon pripada svakom transformatoru. Kada je sekundar neopterećen, primar se ponaša kao induktivnost koja je srazmerne kvadratu broja zavojaka. Budući da transformatori imaju identična jezgra, ulazne impedanse mogu se izraziti kao

$$X_{L1} = \omega L_1 = \omega \cdot A_L N_1^2 = \omega \cdot A_L \cdot 600^2 = a \cdot 36 \qquad X_{L2} = a \cdot 25 \qquad X_{L3} = a \cdot 49$$



Ulazni naponi na transformatorima biće

$$U_1' = \frac{X_{L1}}{X_{L1} + X_{L2} + X_{L3}} U_1 = \frac{a \cdot 36}{a \cdot (36 + 25 + 49)} \cdot 220 = 72V$$

$$U_2' = \frac{X_{L2}}{X_{L1} + X_{L2} + X_{L3}} U_1 = 50V$$

$$U_3' = \frac{X_{L3}}{X_{L1} + X_{L2} + X_{L3}} U_1 = 98V$$

$$U_1'' = \frac{200}{600} \cdot U_1' = \frac{200}{600} \cdot 72 = 24V$$

$$U_2'' = \frac{240}{500} \cdot U_2' = \frac{240}{500} \cdot 50 = 24V$$

$$U_3'' = \frac{300}{700} \cdot U_3' = \frac{300}{700} \cdot 98 = 42V$$

ZADATAK 26: Mrežni transformator čiji je odnos transformacije napona n=0.1 ima stepen korisnog dejstva 88%. Izmerena otpornost žice primara je 8 Ω, a sekundara 0.5 Ω. Debljina žice sekundara je takva da je maksimalna struja kroz zavojke sekundara 3 A. Odrediti koliko iznose gubici usled vihornih struja i histerezisa u jezgru ovog transformatora.

....

Rešenje:

Izlazni napon transformatora je

$$U_2 = n \cdot U_1 = 0.1 \cdot 220V = 22\,V$$

Kako je izlazna struja I_2=3A, to je izlazna snaga transformatora

$$P_2 = I_2 U_2 = 66\,W$$

Ulazna snaga dobija se na osnovu stepena korisnog dejstva

$$\eta = \frac{korisna\ snaga}{utrosena\ snaga} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + P_{gubitaka}} \qquad \rightarrow \qquad P_1 = \frac{P_2}{\eta} = 75\,W$$

što znači da je snaga gubitaka

$$P_{gubitaka} = P_1 - P_2 = 9\,W$$

Ulazna struja je

$$I_1 = \frac{P_1}{U_1} = 341\,mA$$

Snaga gubitaka u namotajima (bakru) je

$$P_{Cu} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = 0.93 + 4.5 = 5.43\,W$$

pa se za snagu gubitaka u jezgru (gvoždju) dobija

$$P_{Fe} = P_{gubitaka} - P_{Cu} = 3.57\,W$$

ZADATAK 27: Mrežni transformator snage 100 W sa jezgrom EI profila treba da daje napon na sekundaru od 12 V. Na osnovi fizičkih dimenzija jezgra može se proceniti da je srednja dužina zavojaka u primaru 18 cm, a u sekundaru 22 cm. Pretpostavljajući da je maksimalna dozvoljena gustina struje kroz provodnike primara i sekundara J=8/π [A/mm²] i da je koeficijent sekundarnih gubitaka ν=1.10, proceniti koliko će da iznosi promena napona na sekundaru kada je:

a) **transformator maksimalno opterećen,**
b) **sekundar transformatora opterećen otpornikom od 4 Ω.**

NAPOMENA: **Broj zavojaka primara proračunava se na osnovu izraza**

$$N_1 = \frac{U_1}{4.44 \cdot f \cdot B_m \cdot S_e} \cdot 10^4 \qquad S_e\,[cm^2]$$

Specifična otpornost bakra je 0.017 Ωmm²/m.

....

Rešenje:

Za mrežni transformator snage $P = 100\,W = P_2 \approx P_1$ imaćemo

$$U_1 = 220V, \quad U_2 = 12\,V, \quad f = 50Hz, \quad B_m = 1.2T, \quad S_e = \sqrt{P_2} = \sqrt{100} = 10\,cm^2$$

pa je broj zavojaka na primaru

$$N_1 = \frac{U_1}{4.44 \cdot f \cdot B_m \cdot S_e} \cdot 10^4 = \frac{220}{4.44 \cdot 50 \cdot 1.2 \cdot 10} \cdot 10^4 = 826$$

Broj zavojaka na sekundaru je sada

$$N_2 = \nu_2 N_1 \frac{U_2}{U_1} = 50$$

što je 10% više zavojaka (ν=1.10) u odnosu na idealan transformator. Struje kroz namotaje iznose

$$I_1 = \frac{P_1}{U_1} = \frac{100}{220} = 454.5\,mA \qquad I_2 = \frac{P_2}{U_2} = \frac{100}{12} = 8.33A$$

Minimalne površine poprečnih preseka žica odredjuju se na osnovu gustine struje

$$S_1 = \frac{I_1}{J} = 0.1785\,mm^2 \qquad S_2 = \frac{I_2}{J} = 3.2724\,mm^2$$

Znajući broj zavojaka, srednju dužinu jednog zavojka i površinu poprečnog preseka, odredjujemo otpornosti primara i sekundara

$$R_1 = \rho \cdot \frac{l_{zav1} N_1}{S_1} = 0.017 \cdot \frac{0.18 \cdot 826}{0.1785} = 14.15\,\Omega \qquad R_2 = \rho \cdot \frac{l_{zav2} N_2}{S_2} = 57.15\,m\Omega$$

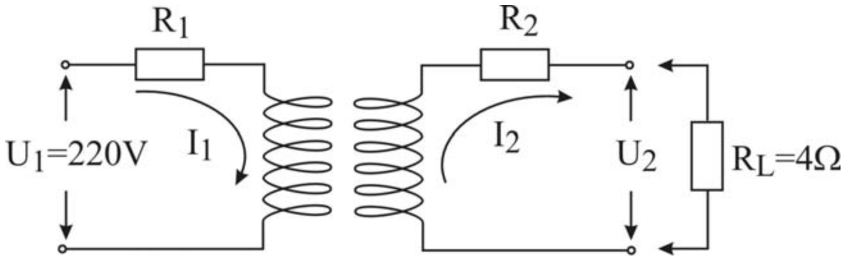
a) Transformator je maksimalno opterećen kada kroz njegove zavojke protiču maksimalne struje, tj. $I_1 = 454.5\,mA$ i $I_2 = 8.33\,A$. Na osnovu ekvivalentne šeme transformatora, koja uključuje otpornosti primara i sekundara (date na slici), za pad napona na sekundaru imaćemo

$$\Delta U_2 = R_2 I_2 + R_1 I_1 \cdot \frac{U_2}{U_1} = 0.48 + 0.35 = 0.83\,V$$

Prvi član na desnoj strani u poslednjem izrazu je smanjenje napona na sekundaru usled pada napona na otpornosti sekundara, a drugi član predstavlja smanjenje napona na primaru usled pada napona na otpornosti primara koje se sa odnosom transformacije U_2/U_1 preslikava na sekundar. Prema tome, sada se može odrediti vrednost koeficijenta sekundarnih gubitaka

$$\nu_2 = \frac{U_2 + \Delta U_2}{U_2} = \frac{12.87}{12} = 1.072$$

Usled postojanja i drugih gubitaka u transformatoru, realna vrednost ovog koeficijenta je neznatno veća, pa se sa pravom može uzeti da iznosi oko 1.10, tj. oko 10-12% više zavojaka treba imati na sekundaru u odnosu na idealni transformator da bi se ovi efekti kompenzovali.



b) Kada je na izlaz transformatora priključen otpornik R_L=4Ω, kroz sekundarni namotaj teći će struja

$$I_2{*} = \frac{U_2}{R_L} = \frac{12\,V}{4\,\Omega} = 3A$$

Otpornost sekundara je u ovom slučaju zanemarena ($R_2 << R_L$). Da bi kompenzovao smanjenje fluksa koje sekundar sa ovom strujom izaziva u jezgru, primar će povući dodatnu struju tako da bude ispunjeno

$$N_1 I_1{*} = N_2 I_2{*} \qquad \Rightarrow \qquad I_1{*} = \frac{N_2 I_2{*}}{N_1} = 0.1816\ A$$

Promena napona na sekundaru će u ovom slučaju biti

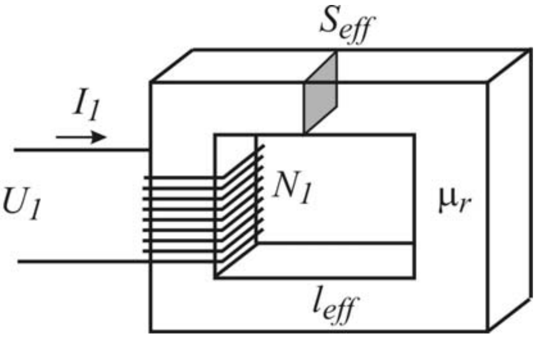
$$\Delta U_2 = R_2 I_2{*} + R_1 I_1{*} \cdot \frac{U_2}{U_1} = 0.17 + 0.14 = 0.31\,V$$

ZADATAK 28: Polazeći od fundamentalnih zakona elektrotehnike i činjenice da se struja u primaru mrežnog transformatora menja po prostoperiodičnom zakonu $i_1(t)=I_m \cdot \cos\omega t$, izvesti izraz za izračunavanje broja zavojaka na primaru transformatora

$$N_1 = \frac{U_1 \cdot 10^4}{4.44 \cdot f \cdot B_m \cdot S_{eff}} \qquad S_{eff}\ [cm^2]$$

....

Rešenje:



Struja primara je prostoperiodična

$$i_1(t) = I_m \cdot \cos\omega t$$

pa je i fluks prostoperiodičan

$$\phi(t) = L \cdot i_1(t) = \mu_0\mu_r \frac{S_{eff}}{l_{eff}} N_1^2 \cdot I_m \cos\omega t$$

Ovako promenljiv fluks indukovaće na primaru elektromotornu silu koja drži ravnotežu ulaznom naponu

$$ems = -\frac{d\phi(t)}{dt} = \mu_0\mu_r \frac{S_{eff}}{l_{eff}} N_1^2 \cdot I_m \cdot \omega \cdot \sin\omega t = u_1(t)$$

Amplituda ulaznog napona je

$$U_{1m} = \mu_0\mu_r \frac{S_{eff}}{l_{eff}} N_1^2 \cdot I_m \cdot 2\pi f = \sqrt{2} \cdot U_1$$

gde je $U_1 = 220V$ efektivna vrednost mrežnog napona. Maksimalna struja na primaru I_m daće maksimalnu indukciju B_m i maksimalni fluks. Izmedju ovih veličina postoji dobro poznata veza

$$B_m = \mu_0\mu_r \cdot H_m = \mu_0\mu_r \cdot \frac{N_1 I_m}{l_{eff}}$$

Zamenom ovog izraza u prethodni dobijamo

$$U_{1m} = B_m \cdot S_{eff} \cdot N_1 \cdot 2\pi f = \sqrt{2} \cdot U_1$$

Odavde se dobija izraz za odredjivanje broja zavojaka na primaru transformatora

$$N_1 = \frac{U_1}{\frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cdot f \cdot B_m \cdot S_{eff}} = \frac{U_1}{4.44 \cdot f \cdot B_m \cdot S_{eff}} \qquad S_{eff}\ [m^2]$$

U slučaju kada se površina poprečnog preseka jezgra izražava u *[cm²]*, dobija se konačno

$$N_1 = \frac{U_1 \cdot 10^4}{4.44 \cdot f \cdot B_m \cdot S_{eff}} \qquad S_{eff}\ [cm^2]$$