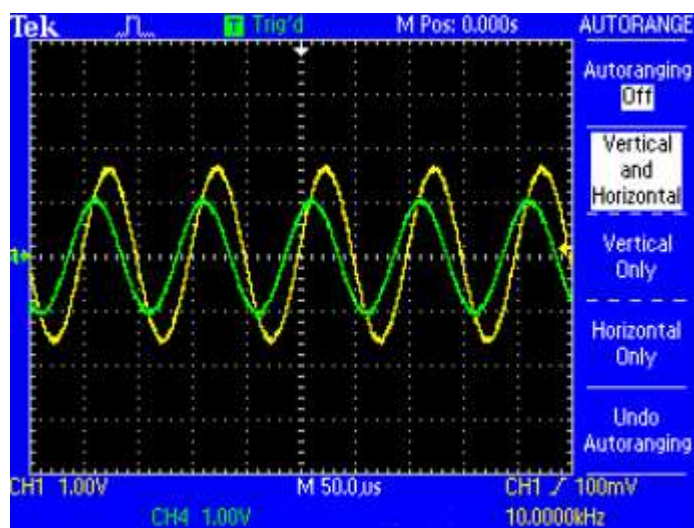


Naizmenični signali i osnovna elektronska kola

Zoran Prijić, Aneta Prijić

Univerzitet u Nišu
Elektronski fakultet
Katedra za mikroelektroniku

Niš, 2013.



Sadržaj

1	Uvod	1
2	Naizmenični signali	3
2.1	Definicije	3
2.2	Polarna reprezentacija	4
2.3	Algebarska reprezentacija	6
2.4	Vršna, efektivna i srednja vrednost	8
2.4.1	Sinusni signal	10
2.4.2	Drugi oblici naizmeničnih signala	12
3	Osnovna elektronska kola	17
3.1	Otpornik u AC kolu	17
3.2	Kondenzator u AC kolu	18
3.2.1	Prelazni režim kondenzatora	21
3.3	RC kolo	23
3.3.1	RC kolo sa paralelnim otpornikom	25
3.4	Kalem u AC kolu	27
3.4.1	Prelazni režim kalema	29
3.5	RL kolo	30
3.5.1	RL kolo sa paralelnim otpornikom	32
3.6	RLC kolo	33
3.7	Rezonansa	37
	Dodatak A Brojevi u tehničkoj literaturi	43
A.1	Formati brojeva	43
A.2	Upotreba kalkulatora	45
	Dodatak B Osnovne operacije sa kompleksnim brojevima	49
B.1	Definicije	49
B.2	Sabiranje	50
B.3	Oduzimanje	50
B.4	Množenje	51
B.5	Deljenje	51

Dodatak C	Izračunavanje efektivne i srednje vrednosti	53
C.1	Signal oblika testere	53
C.2	Signal oblika trougla	54
C.3	Signal oblika pravougaonika	55
Dodatak D	Izračunavanje napona u prelaznom režimu kondenzatora	57
Dodatak E	Određivanje napona na kondenzatoru u RC kolu	59
Dodatak F	Izračunavanje struje u prelaznom režimu kalema	61

Glava 1

Uvod

Ovaj tekst namenjen je pre svega studentima Elektronskog fakulteta kao pomoćni materijal u savladavanju gradiva iz predmeta ELEKTRONSKE KOMPONENTE, na prvoj godini studija. U materijalu je dat kratak pregled osnovnih pojmova koji se odnose na naizmjenične signale, uključujući i opis naizmjeničnih signala koji se najčešće sreću u praksi. Pored toga, data je i kratka analiza nekih osnovnih elektronskih kola kod kojih se naizmjenični signali koriste kao pobuda. Za analizu kola upotrebljena je varijanta programa SPICE, čija se besplatna verzija pod nazivom LTspiceIV može preuzeti sa Web lokacije <http://www.linear.com>. Studenti se ohrabruju da nauče simulaciju kola jer autori smatraju da će im to znanje biti od koristi i u radu na višim godinama studija.

Autori naglašavaju da ovaj materijal ne može da zameni znanja koja studenti treba da steknu iz predmeta ELEKTROTEHNIKA, kako bi uspešno savladali gradivo iz predmeta ELEKTRONSKE KOMPONENTE. Kvalitetan izvor informacija za detaljnije proučavanje ovde opisanih pojava može se naći npr. na <http://www.ibiblio.org/kuphaldt/electricCircuits/>, kao i na više drugih Web lokacija.

Upozorenje: Materijal prezentiran u ovom tekstu koncipiran je tako da, ilustrujući pojedine fizičke pojave i tehničke principe, služi isključivo u obrazovne svrhe. Zbog toga su u mnogim slučajevima korišćene određene aproksimacije. Čitaoci moraju biti svesni činjenice da se praktična realizacija pojedinih kola u većini slučajeva razlikuje od ovde predstavljene.

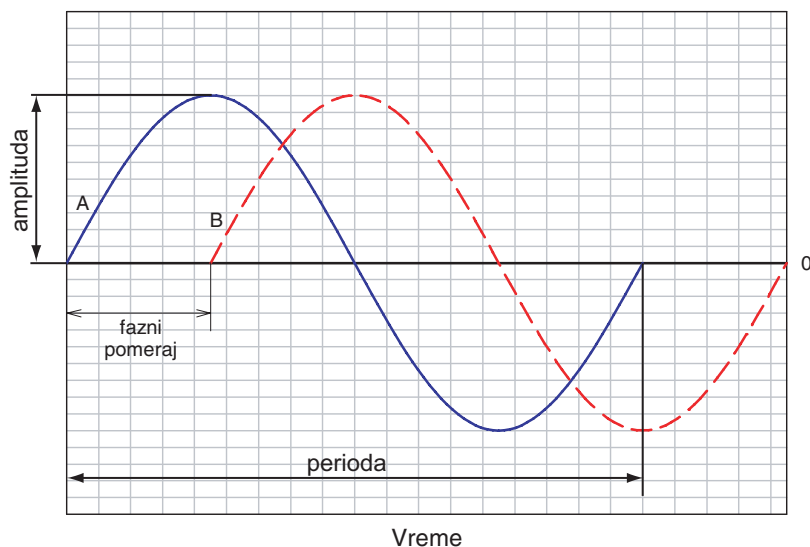
U slučaju da se ne poštuju propisane mere bezbednosti, rad sa naizmjeničnim signalima može biti opasan po život !

Glava 2

Naizmenični signali

2.1 Definicije

Pod naizmeničnim signalom će se u ovom tekstu podrazumevati signal čija se amplituda naizmenično menja u vremenu, u odnosu na referentnu („nultu“) vrednost, kao što je ilustrovano na Sl. 2.1. Nulta vrednost ne



Slika 2.1: Opšti oblik sinusnog naizmeničnog signala i definicija faznog pomeraja.

mora nužno podrazumevati nulu, jer u elektronici nije neuobičajeno da se naizmenični signal superponira nekom jednosmernom signalu. Naizmenični signali se u stručnoj literaturi uobičajeno označavaju skraćenicom AC (*Alternate Current*), za razliku od jednosmernih koji se označavaju skraćenicom DC (*Direct Current*). Jednosmerni signali predstavljaju skalarne veličine, dok naizmenični, s obzirom na promene u vremenu, predstavljaju

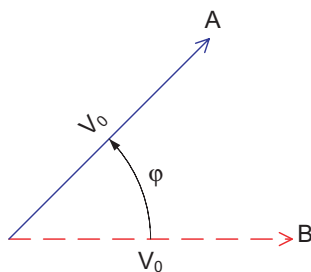
vektorske veličine.

Vreme za koje se izvrši jedna naizmjenična promena amplitude određuje **periodu** signala T (*cycle*). Broj perioda u jedinici vremena definiše **učestanost** ili frekvenciju f (*frequency*) naizmjeničnog signala. Ako se za jedinicu vremena uzme sekunda, učestanost se dobija u Hercima [Hz], tako da broj Hz predstavlja broj perioda u jednoj sekundi. Evidentno je da su učestanost i perioda obrnuto proporcionalni, tj. da je $f = 1/T$.

Za potpuni opis naizmjeničnog signala je, pored učestanosti, potrebno poznavanje i pozicije tog signala na vremenskoj osi u odnosu na neki referentni signal, kao što je to ilustrovano na Sl. 2.1. Ako je posmatrani signal A , a referentni signal B , razlika pozicija ta dva signala na vremenskoj osi naziva se **fazni pomeraj** (*phase shift*). Pošto na vremenskoj osi može postojati n signala, to znači da se fazni pomeraj može definisati i između bilo koja dva signala, pri čemu jedino treba voditi računa o tome koji se signal od ta dva proglašava referentnim. Iz ovoga se može izvesti zaključak da je fazni pomeraj relativna veličina čija se vrednost meri između dva signala. Ipak, u praksi je pogodno izabrati određeni signal čija će se pozicija na vremenskoj osi proglašati apsolutnom (tj. „nultom“) i u odnosu na koju će se određivati fazni pomeraj svih ostalih signala.

2.2 Polarna reprezentacija

Amplituda, učestanost i fazni pomeraj dovoljni su za potpunu vektorsku reprezentaciju naizmjeničnog signala. Intenzitet vektora, odnosno njegova dužina, predstavljaće **amplitudu**¹ signala. Ako se smatra da su signali prostoperiodičnog oblika, logično je usvojiti polarni koordinatni sistem tako da jedna perioda odgovara celom krugu, odnosno uglu 360° ($= 2\pi \text{ rad}$). U tom slučaju se fazni pomeraj može izraziti preko ugla $0 \leq \varphi \leq 360^\circ$. Pod pretpostavkom da referentni signal B i posmatrani signal A imaju iste amplitude V_0 , njihova vektorska reprezentacija bi izgledala kao na Sl. 2.2. Još jednom treba naglasiti da se ugao φ određuje u odnosu na



Slika 2.2: Polarna reprezentacija naizmjeničnih signala.

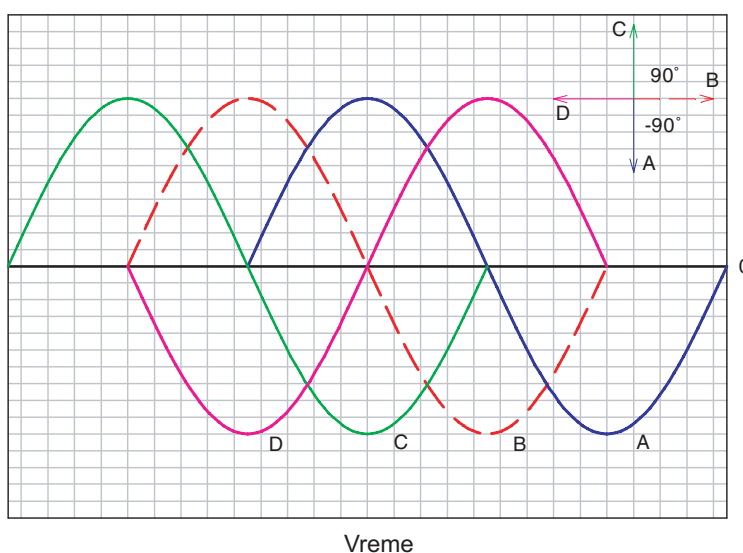
¹Amplituda naizmjeničnog signala naziva se i magnituda (*magnitude*).

referentni signal, kod koga se smatra da je $\varphi = 0$, tako da se signal B može opisati izrazom $V_0 \angle 0$, a signal A , na osnovu Sl. 2.2, izrazom:

$$\mathbf{V} = V_0 \angle \varphi . \quad (2.1)$$

gde je \mathbf{V} vektor, što je ujedno i opšti oblik polarne (vektorske) reprezentacije naizmeničnog signala.

Kada se signal A po vremenskoj osi u potpunosti poklapa sa signalom B , tj. kada je fazni pomeraj između njih jednak nuli, kaže se da su signali "u fazi". Kada je fazni pomeraj između dva signala jednak 180° kaže se da su signali u protivfazi. U ostalim slučajevima signal ili kasni ili prednjači u odnosu na referentni signal, kao što je to ilustrovano na Sl. 2.3.



Slika 2.3: Ilustracija faznih pomeraja: signal A kasni u odnosu na signal B ; signal C prednjači u odnosu na signal B ; signal D i signal B su u protivfazi.

Korišćenjem polarne reprezentacije moguće su i algebarske operacije nad skupom signala, po pravilima koja važe za vektore. Pored toga, polarne reprezentacije omogućava definiciju **ugaone brzine** ω (angular velocity) kao:

$$\omega = 2\pi f . \quad (2.2)$$

Ovakva definicija ugaone brzine podrazumeva učestanost prostoperiodičnog signala, odnosno signala čija perioda odgovara uglu $2\pi \text{ rad}$.

Vektori prikazani u obliku (2.1) se nazivaju **fazori** (*phasor*). Algebarske operacije nad fazorima mogu se sprovoditi samo nad signalima koji imaju istu učestanost f .

Ugaona brzina ω se u domaćoj stručnoj literaturi često naziva kružna učestanost.

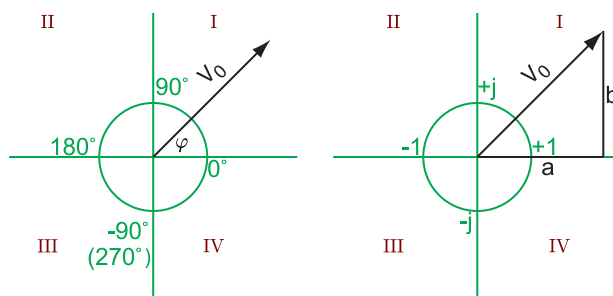
2.3 Algebarska reprezentacija

Naizmenični signal je moguće opisati i pomoću kompleksnog broja u algebarskom (ortogonalnom) obliku:

$$\mathbf{V} = a + jb, \quad (2.3)$$

pri čemu se veza između polarne i algebarske reprezentacije ostvaruje po pravilima preslikavanja polarne koordinatne ravni u kompleksnu ravan, što je ilustrovano na Sl. 2.4. Na osnovu Sl. 2.4 zaključuje se da je veza iz-

U anglosaksonskoj tehničkoj literaturi algebarska reprezentacija se naziva pravougaona (rectangular).



Slika 2.4: Polarna i algebarska reprezentacija naizmeničnog signala (kvadranti su označeni rimskim brojevima).

među (2.1) i (2.3) određena relacijama:

$$V_0 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2.4)$$

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a}. \quad (2.5)$$

Primer 2.3.1 Signal $\mathbf{V} = 2 + j5$ prikazati u polarnom obliku.

$$\begin{aligned} V_0 &= \sqrt{2^2 + 5^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{5}{2} \\ \mathbf{V} &= 5,385 \angle 68,198^\circ \end{aligned}$$

Primer 2.3.2 Signal $\mathbf{V} = 8 \angle 32^\circ$ prikazati u kompleksnom obliku.

$$a = 8 \cos 32^\circ$$

$$\begin{aligned} b &= 8 \sin 32^\circ \\ \mathbf{V} &= 6,78 + j4,24 \end{aligned}$$

Treba obratiti pažnju na znake koje imaju vrednosti a i b u kompleksnoj ravni, jer oni određuju kom kvadrantu u polarnoj ravni pripada ugao φ .

$$\arctan \frac{b}{a} = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a}, & \text{za } a > 0 \text{ i } b > 0 \text{ (I kvadrant);} \\ 90^\circ, & \text{za } a = 0 \text{ i } b > 0; \\ \arctan \frac{b}{a} + 180^\circ, & \text{za } a < 0 \text{ i } b \geq 0 \text{ (II kvadrant);} \\ 270^\circ, & \text{za } a = 0 \text{ i } b < 0; \\ \arctan \frac{b}{a} + 180^\circ, & \text{za } a < 0 \text{ i } b < 0 \text{ (III kvadrant);} \\ \arctan \frac{b}{a} + 360^\circ, & \text{za } a > 0 \text{ i } b < 0 \text{ (IV kvadrant);} \end{cases} \quad (2.6)$$

U anglosaksonskoj tehničkoj literaturi funkcija $\arctan(x)$ se označava sa $\tan^{-1}(x)$, što nije isto kao $1/\tan(x)$!

Definicija (2.6) prilagođena je tako da se na osnovu nje dobijaju vrednosti $0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$. Pri tome, prema ovde usvojenoj konvenciji, vrednost ugla φ raste suprotno smeru kretanja kazaljke na satu².

Primer 2.3.3 Signal $\mathbf{V} = -1 + j1$ prikazati u polarnom obliku.

$$\begin{aligned} V_0 &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} \simeq 1,41 \\ \arctan \frac{+1}{-1} &= -45^\circ \end{aligned}$$

U ovom slučaju je $a < 0$ i $b > 0$, što odgovara drugom kvadrantu na Sl. 2.4. To znači da je ugao φ u stvari $-45^\circ + 180^\circ = 135^\circ$.

$$\mathbf{V} = 1,41 \angle 135^\circ$$

Primer 2.3.4 Signal $\mathbf{V} = -1 - j1$ prikazati u polarnom obliku.

$$\begin{aligned} V_0 &= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} \simeq 1,41 \\ \arctan \frac{-1}{-1} &= +45^\circ \end{aligned}$$

²U upotrebi mogu biti i drugačije definicije, u zavisnosti od usvojene konvencije. Međutim, rezultat izračunavanja će uvek biti isti.

U ovom slučaju je $a < 0$ i $b < 0$, što odgovara trećem kvadrantu na Sl. 2.4. To znači da je ugao φ u stvari $+45^\circ + 180^\circ = 225^\circ$.

$$\mathbf{V} = 1,41 \angle 225^\circ$$

Primer 2.3.5 Signal $\mathbf{V} = 1 - j1$ prikazati u polarnom obliku.

$$V_0 = \sqrt{1^2 + (-1)^2} \simeq 1,41$$

$$\arctan \frac{-1}{+1} = -45^\circ$$

U ovom slučaju je $a > 0$ i $b < 0$, što odgovara četvrtom kvadrantu na Sl. 2.4. To znači da je ugao φ u stvari $-45^\circ + 360^\circ = 315^\circ$.

$$\mathbf{V} = 1,41 \angle 315^\circ$$

U slučaju algebarske reprezentacije, operacije nad skupom signala izvršavaju se po pravilima koja važe za kompleksne brojeve (videti Dodatak B). Algebarska i polarna reprezentacija se mogu povezati i preko Ojlerove (Euler) formule:

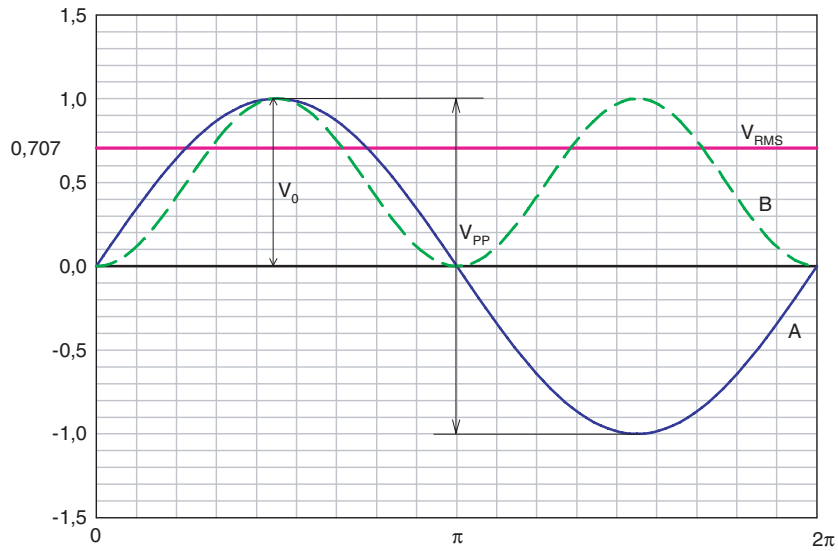
$$\mathbf{V} = V_0 \exp(j\varphi) = V_0 \cos \varphi + jV_0 \sin \varphi, \quad (2.7)$$

koja je pogodnija za operacije množenja i deljenja.

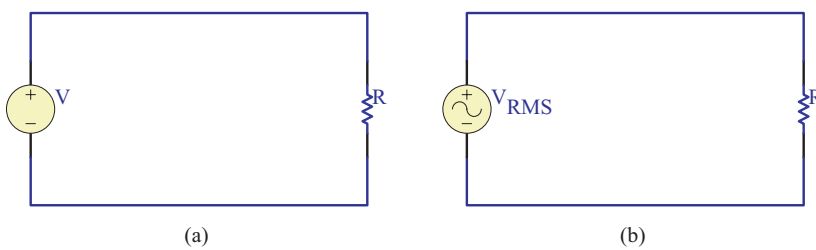
2.4 Vršna, efektivna i srednja vrednost

Amplituda definisana na Sl. 2.1 naziva se i vršna (*peak* ili *crest*) vrednost, označava se sa V_0 ili V_P i može se koristiti za kvantitativno opisivanje naizmeničnih signala. U praksi se koristi i vrednost između suprotnih vrhova signala V_{PP} (*peak-to-peak*), kao na Sl. 2.5.

Ako se posmatra kolo prikazano na Sl. 2.6(a) zaključuje se da je snaga P koja se disipira na otporniku R jednaka V^2/R , pri čemu je V vrednost jednosmernog (DC) napona. Postavlja se pitanje kakav naizmenični signal treba upotrebiti da bi se na otporniku dispirala ista snaga kao u slučaju kada je na njega priključen DC signal vrednosti V . Drugim rečima, treba pronaći vrednost naizmeničnog signala V_{RMS} sa Sl. 2.6(b) koja predstavlja „ekvivalent“ DC vrednosti V . U tu svrhu potrebno je poznavanje oblika signala.



Slika 2.5: Definicija vršne i efektivne vrednosti sinusnog naizmeničnog signala: A je osnovni signal, B je kriva snage.



Slika 2.6: DC kolo (a) i AC ekvivalent (b).

2.4.1 Sinusni signal

Neka signal A sa Sl. 2.5 predstavlja napon koji se dovodi na otpornik u obliku:

$$v(t) = V_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.8)$$

pri čemu se može, pošto je to jedini signal u kolu, uzeti da je $\varphi = 0$. Trenutna snaga koja se disipira na otporniku u svakom vremenskom trenutku t tokom jedne periode T je $v^2(t)/R$, što dogovara krivoj B na Sl. 2.5. Da bi se pronašao DC „ekvivalent“ snage, logično je potražiti njenu srednju vrednost tokom jedne periode, što se svodi na pronalaženje srednje vrednosti napona $v^2(t)$. S obzirom da je, na osnovu Sl. 2.5, $T = 2\pi/\omega$, to je:

$$\frac{1}{T} \langle v^2(t) \rangle = \frac{V_0^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{V_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \frac{V_0^2}{2} = V_{RMS}^2. \quad (2.9)$$

Definicija (2.9) koristi teoremu o srednjoj vrednosti integrala, a sam integral rešava se uvođenjem smene $\omega t = x$ i upotrebom trigonometrijske relacije $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$.

Izjednačavanjem uslova snage kola sa Sl. 2.6(a) i (b) dobija se:

$$\frac{V^2}{R} \equiv \frac{V_{RMS}^2}{R} = \frac{1}{R} \frac{V_0^2}{2}, \quad (2.10)$$

što daje:

$$V_{RMS} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = 0,707V_0. \quad (2.11)$$

Ovo znači da će naizmenični napon amplitude $V_0 = 1$ V proizvesti istu disipaciju snage na otporniku R kao njegov jednosmerni ekvivalent vrednosti $V = 0,707$ V (videti Sl. 2.5). Vrednost V_{RMS} naziva se **efektivna vrednost** naizmeničnog signala. Skraćenica *RMS* u indeksu potiče od engleskog izraza *Root Mean Square*, koji opisuje metodu kojom je efektivna vrednost izračunata. U literaturi se ova vrednost označava i sa V_{eff} i u opštem slučaju se može izraziti relacijom:

$$V_{RMS} \equiv V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt}. \quad (2.12)$$

Posebno je važno reći da efektivna vrednost V_{RMS} nije isto što i srednja vrednost V_{AVG} (*average*), koja se dobija jednostavnim usrednjavanjem³:

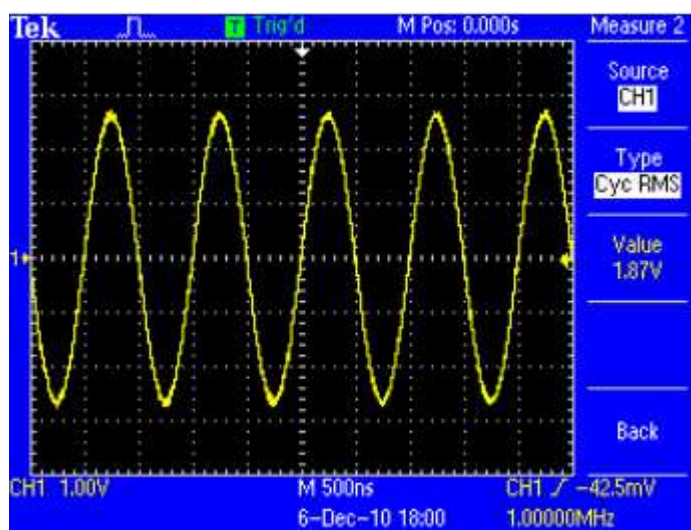
$$V_{AVG} = \frac{1}{T} \int_0^T |v(t)| dt = \frac{V_0}{T} \int_0^T |\sin(\omega t)| dt = 0,637V_0. \quad (2.13)$$

Realni oblik sinusnog signala se može snimiti pomoću instrumenta koji se naziva **osciloskop**, kao što je to prikazano na Sl. 2.7.

Treba imati u vidu da analogni AC voltmetri (tzv. instrumenti sa kretanim kalemom) mere srednju vrednost signala, ali su kalibrisani tako da prikazuju efektivnu vrednost. Kalibracija instrumenata je tačna samo kada je

³Rešenje (2.13) je $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi} = 0,637$

Podeok (*division*) predstavlja stranicu jednog kvadrata na mreži prikazanoj na ekranu osciloskopa.



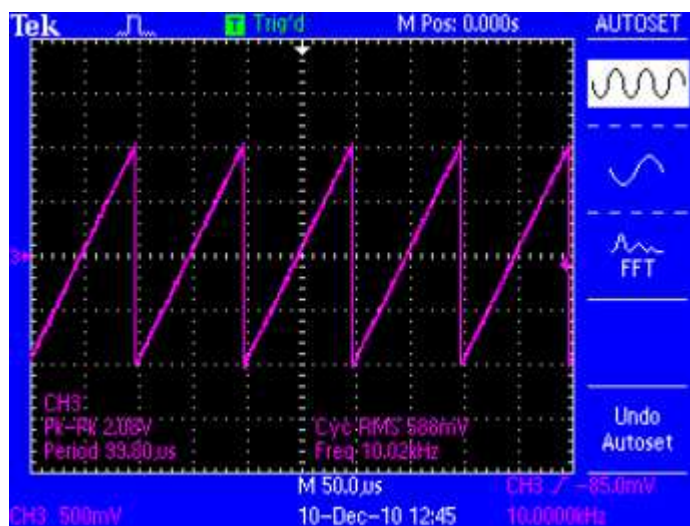
Slika 2.7: Realni sinusni signal, snimljen na osciloskopu. Na X osi je vreme, sa razmerom od 500 ns po podeoku; na Y osi je napon sa razmerom od 1 V po podeoku.

signal koji se meri sinusni. Digitalni voltmetri postoje u više varijanti. Neki, kao i analogni, mere srednju vrednost signala, a na osnovu kalibracione skale prikazuju efektivnu vrednost, u kom slučaju važi i prethodna konstantacija o tačnosti merenja. Drugi, tzv. pravi RMS voltmetri (*true RMS*), mere vrednost amplitude signala u nizu vremenskih intervala koji su znatno manji od periode signala i zatim izračunavaju i prikazuju efektivnu vrednost na osnovu prethodno opisanog algoritma. Postoje i AC voltmetri kod kojih se princip merenja zasniva na fizici pojave, odnosno na merenju disipacije snage na otporniku poznate otpornosti. U svakom slučaju, pre upotrebe instrumenta potrebno je obratiti pažnju za kakvu vrstu signala je kalibrisan, kao i na princip merenja na kome je zasnovan, što proizvođači obično navode u tehničkim specifikacijama. Praktični saveti u vezi sa metodologijom merenja i korekcijom grešaka mogu se najčešće naći na Web lokacijama proizvođača instrumenata.

Sinusni signal je svakako jedan od najzastupljenijih u praksi, pre svega zbog činjenice da je i samo mrežno napajanje (*line voltage*) takvog oblika. Efektivna vrednost mrežnog napajanja u Evropi se kreće u granicama $220 \div 240$ V, a učestanost je 50 Hz. To znači da je amplituda takvog signala $311 \div 339$ V. U SAD i nekim drugim zemljama efektivna vrednost mrežnog napajanja je $110 \div 120$ V, a učestanost je 60 Hz, pa je amplituda takvog signala $156 \div 170$ V. Sinusni signal je takođe zastupljen i u mnogim aplikacijama, pre svega analogne elektronike. Međutim, pored sinusnog, postoji još nekoliko oblika naizmeničnih signala koji se često sreću u praksi, a koji će biti razmotreni u daljem tekstu.

2.4.2 Drugi oblici naizmjeničnih signala

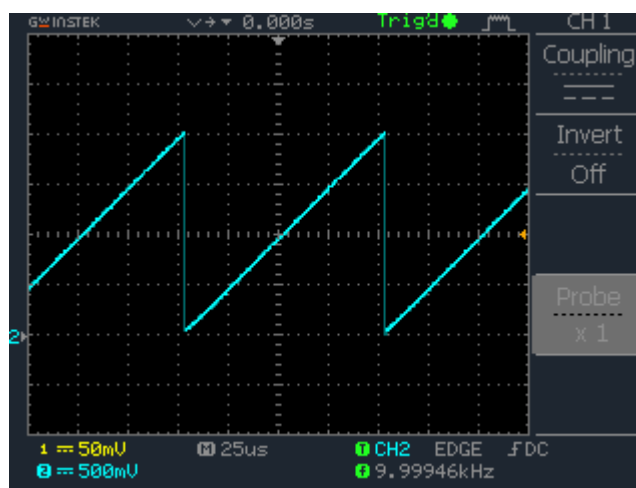
Na Sl. 2.8 je prikazan naizmjenični signal oblika testere (*sawtooth*). Efektivna



Slika 2.8: Realni naizmjenični signal oblika testere.

i srednja vrednost ovog signala su $V_0/\sqrt{3}$ i $V_0/2$, respektivno, a postupak njihovog izračunavanja opisan je u Dodatku C.

Iako se, na osnovu formalne definicije date u 2.1, ne može smatrati potpunim naizmjeničnim signalom, zbog veoma česte pojave u praksi, ovde će biti razmotren i signal oblika rampe (*ramp*) koji je prikazan na Sl. 2.9. Za

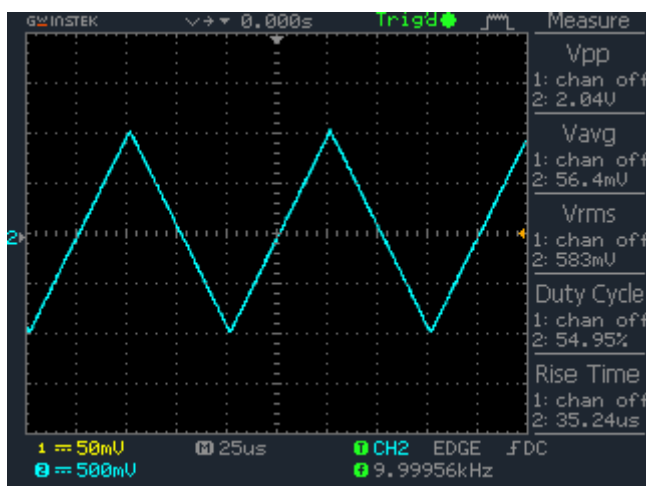


Slika 2.9: Realni signal oblika rampe.

razliku od signala sa Sl. 2.8, amplituda signala sa Sl. 2.9 nikada nije manja

od nule. Efektivna i srednja vrednost signala su iste kao i u slučaju naizmjeničnog signala oblika testere (videti Dodatak C).

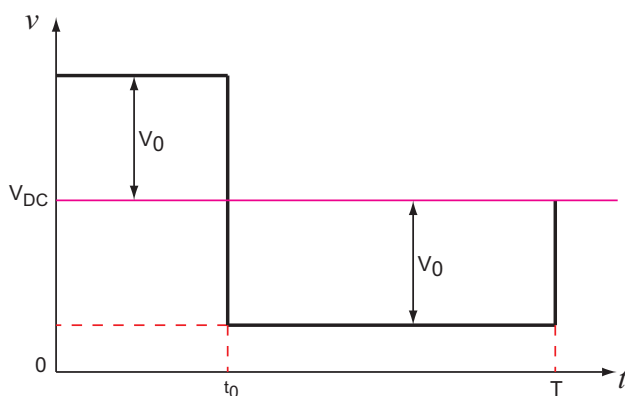
Drugi naizmjenični signal koji se često sreće u primeni je signal oblika trougla, prikazan na Sl. 2.10. Efektivna i srednja vrednost naizmjeničnog



Slika 2.10: Realni signal oblika trougla.

signala oblika trougla su $V_0/\sqrt{3}$ i $V_0/2$, respektivno, a postupak njihovog određivanja dat je u Dodatku C.

Geometrijska reprezentacija naizmjeničnog signala oblika pravougaonika (*square wave*), koji je od velikog značaja za primenu u digitalnoj elektronici, prikazana je na Sl. 2.11. Treba primetiti da u ovom slučaju ampli-



Slika 2.11: Naizmjenični signal oblika pravougaonika.

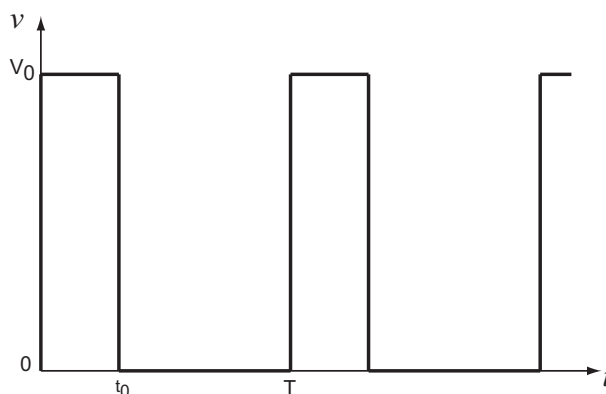
tuda signala naizmjenično menja vrednost u odnosu na konstantni jednosmerni napon V_{DC} , kao što je to napomenuto u 2.1. Napon V_{DC} se naziva i napon pomeraja (*offset voltage*). Pored toga, promena vrednosti ampli-

tude nije ravnomerno raspoređena tokom jedne periode. Vreme t_0 naziva se vreme trajanja impulsa (*pulse time*). Odnos vremena t_0 i periode T naziva se **faktor iskorišćenja periode** D (*duty cycle*) i izražava se u procentima:

$$D = \frac{t_0}{T} \times 100 \text{ (\%)} \quad (2.14)$$

U specijalnom slučaju, kada je $V_{DC} = 0$ i $t_0 = T/2$, srednja vrednost signala je jednaka efektivnoj, tj. $V_{RMS} = V_{AVG} = V_0$ (videti Dodatak C).

U digitalnoj elektronici se često sreće i signal koji predstavlja povorku impulsa i čija je geometrijska reprezentacija prikazana na Sl. 2.12. Na osnovu



Slika 2.12: Povorka impulsa.

definicije (2.12) efektivna vrednost ovog signala je:

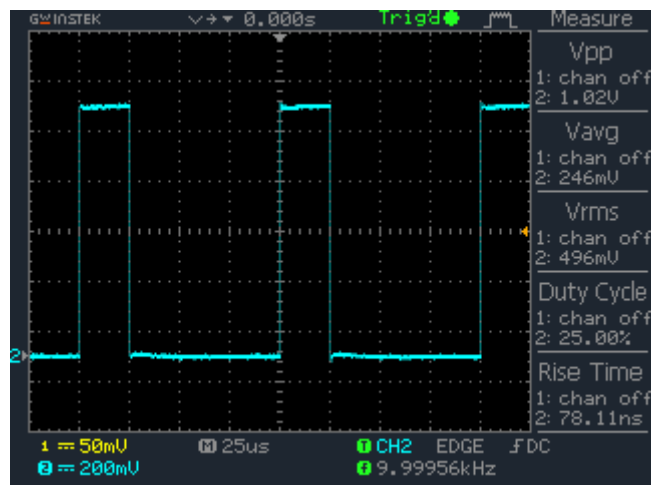
$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{t_0} V_0^2 dt} = V_0 \sqrt{\frac{t_0}{T}}, \quad (2.15)$$

dok je, na osnovu (2.13) srednja vrednost signala:

$$V_{AVG} = \frac{1}{T} \int_0^{t_0} V_0 dt = V_0 \frac{t_0}{T}. \quad (2.16)$$

S obzirom da je uvek ispunjen uslov $t_0/T \leq 1$, to je i $V_{AVG} \leq V_{RMS}$. Realna povorka impulsa prikazana je na Sl. 2.13.

Treba istaći da su svi izrazi u ovom potpoglavlju izvedeni za slučaj da je opterećenje u kolu otpornik, uz pretpostavku uslova prilagođenja snage (2.10). Inače, ovi signali se dobijaju posebnim uređajima koji se nazivaju signal generatorima ili generatorima funkcija.



Slika 2.13: Realna povorka impulsa učestanosti $f = 10 \text{ kHz}$, sa faktorom iskorišćenja periode $D = 25\%$.

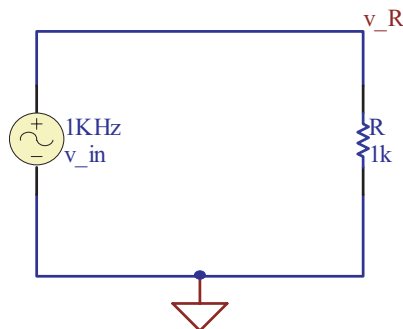
Glava 3

Osnovna elektronska kola

3.1 Otpornik u AC kolu

Na Sl. 3.1 prikazano je AC kolo sa otpornikom kao opterećenjem. Na ulazu kola je sinusni signal v_{in} amplitude $V_0 = 1V$ i učestanosti 1 kHz, a otpornik ima vrednost $R = 1 k\Omega$.

Primedba: *Električne šeme i grafikoni dati u ovom tekstu generisani su iz programa za simulaciju kola SPICE u kome, iz tehničkih razloga, nije moguće indeksno označavanje veličina. Zato će u ovom tekstu biti usvojena konvencija $x_k \equiv x_k$ i $x^k \equiv x^k$, koja povezuje oznake u tekstu sa oznakama na šemama i grafikonima.*

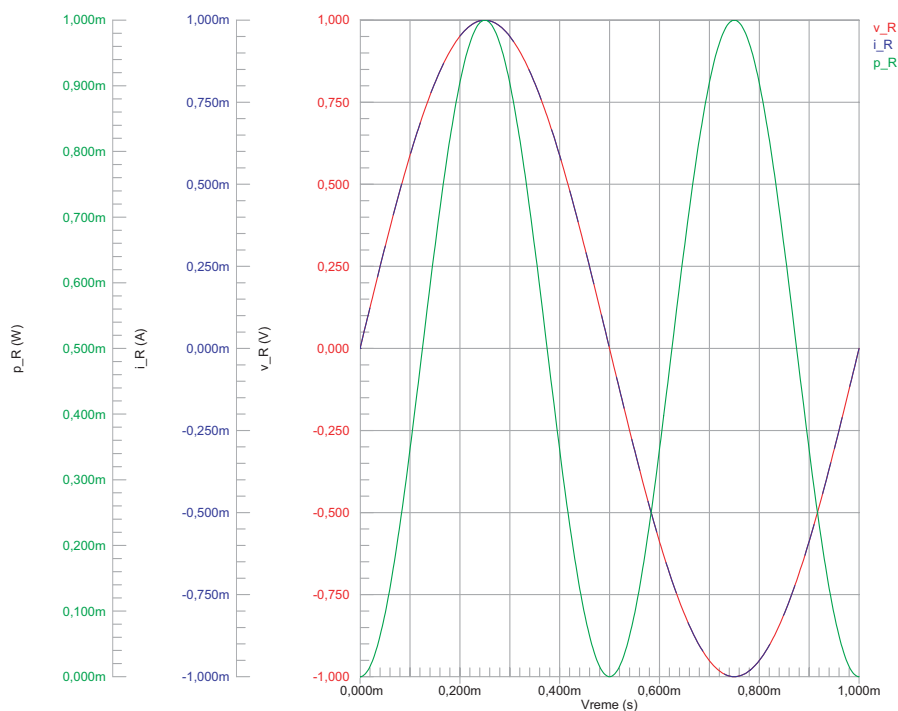


Slika 3.1: Otpornik u AC kolu.

Napon na otporniku v_R , struja kroz otpornik i_R i snaga na otporniku p_R se menjaju sa promenom ulaznog napona v_{in} na način prikazan na Sl. 3.2. Na osnovu Omovog zakona za AC kola može se napisati:

$$I_R = \frac{V_R}{Z}, \quad (3.1)$$

pri čemu je Z vektorska veličina koja se naziva impedansa kola. U ovom slučaju se impedansa kola, na osnovu kompleksne reprezentacije (2.3) i



Slika 3.2: Napon, struja i snaga na otporniku u AC kolu.

Sl. 2.4, može napisati kao:

$$\mathbf{Z} = R + j0 = R, \quad (3.2)$$

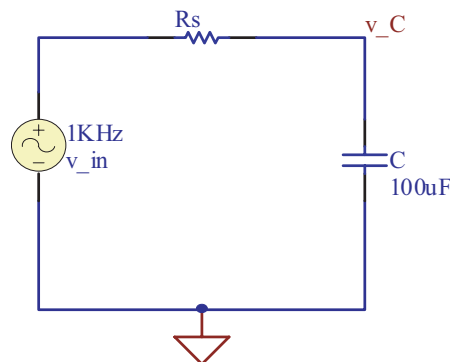
jer su struja i_R i napon v_R u fazi, što je uočljivo sa Sl. 3.2.

Snaga koja se disipira na otporniku definisana je kao $p_R = v_R i_R = v_R^2 / R$. Sa Sl. 3.2 se uočava da je snaga, za razliku od napona i struje, uvek pozitivna. To znači da otpornik uvek disipira snagu (u obliku toplotne energije), bez obzira na polaritet struje koja prolazi kroz njega. Jedan od važnih parametara prilikom izbora otpornika za praktičnu primenu je, pored vrednosti, upravo i maksimalna snaga za koju je otpornik predviđen. .

3.2 Kondenzator u AC kolu

Na Sl. 3.3 prikazano je AC kolo sa kondenzatorom kao opterećenjem. Treba imati u vidu da se kondenzator u praksi nikada ne pojavljuje bez redne otpornosti R_s o kojoj će biti više reči u 3.2.1 i 3.3, a na ovom mestu će njen uticaj biti zanemaren zbog jednostavnosti razmatranja.

Primedba: U programu SPICE dvopolne komponente imaju svoj „+“ i „-“ kraj, tj. pinove označene brojevima 1 i 2, respektivno. Da bi si-



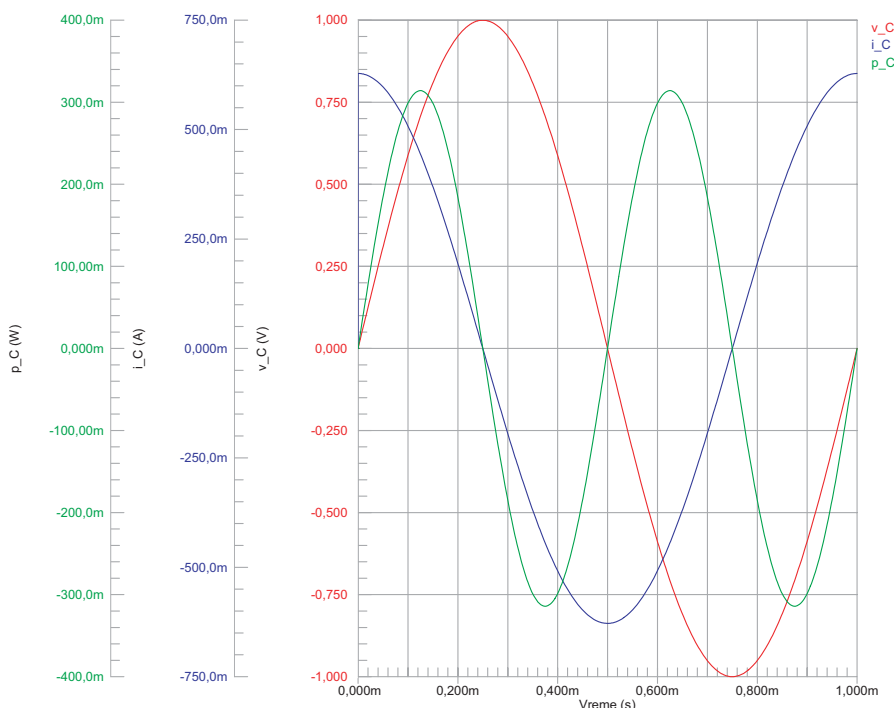
Slika 3.3: Kondenzator u AC kolu.

mulirani signali odgovarali realnosti, potrebna je i pravilna orijentacija komponente u električnoj šemi. To znači da pin 1 kod kondenzatora treba da bude orijentisan ka „pozitivnom“ kraju signala. Prilikom postavljanja simbola kondenzatora na električnu šemu često se dešava da se pinovi nađu u obrnutom položaju, pa se dobijaju neočekivani rezultati. Zbog toga treba proveriti položaj pinova uključivanjem opcije za prikaz brojeva pinova. Slično važi i za kalem, a korisno je steći naviku da se to čini i kod otpornika. Pored toga, umesto oznake μ se u programu SPICE koristi slovo „u“, pa je $\mu F \equiv uF$.

Dovođenje naizmeničnog napona na kondenzator izaziva na njegovim oblogama naizmenično nagomilavanje i odvođenje naelektrisanja. Proces nagomilavanja naelektrisanja na oblogama naziva se punjenje (*charging*), a obrnuti proces pražnjenje (*discharging*) kondenzatora, o čemu će detaljnije biti reči u 3.2.1. Kada na jednu oblogu kondenzatora dođe jedna količina naelektrisanja, ekvivalentna količina napusti drugu oblogu, stvarajući na taj način privid protoka struje kroz kondenzator. Kao posledica nagomilavanja naelektrisanja u vremenu nastaje porast napona na oblogama kondenzatora v_C , što rezultira smanjenjem struje i_C i obratno. Struja u kolu je, dakle, srazmerna promeni napona u vremenu, pa se može napisati:

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}. \quad (3.3)$$

Može se reći da se kondenzator suprotstavlja promenama napona na sopstvenim oblogama koje mu nameće izvor v_{in} . Izraz (3.3) ukazuje da će struja u kolu biti najveća kada je promena napona u vremenu najveća, a da će biti jednaka nuli kada je ta promena jednaka nuli, što je ilustrovano na Sl. 3.4.



Slika 3.4: Napon, struja i snaga na kondenzatoru u AC kolu.

S obzirom da je za proces punjenja kondenzatora potrebno određeno vreme, tj. da se napon na njemu ne može promeniti trenutno¹, to se na osnovu Sl. 3.4 može reći da napon v_C kasni za strujom i_C . Fazni pomeraaj između struje i napona je -90° (videti Sl. 2.3). Promena snage sa Sl. 3.4 je takođe naizmenična, što govori da kondenzator kontinualno ne dissipira snagu u vremenu kao otpornik, već vrši naizmeničnu apsorpciju i oslobađanje energije.

Opisani proces reakcije kondenzatora na promene napona u vremenu se može kvantifikovati veličinom koja se naziva **reaktansa** kondenzatora:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad [\Omega], \quad (3.4)$$

pa se impedansa kola, na osnovu (2.3) i Sl. 2.4, može napisati kao:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_C = 0 - jX_C = -j\frac{1}{\omega C}, \quad (3.5)$$

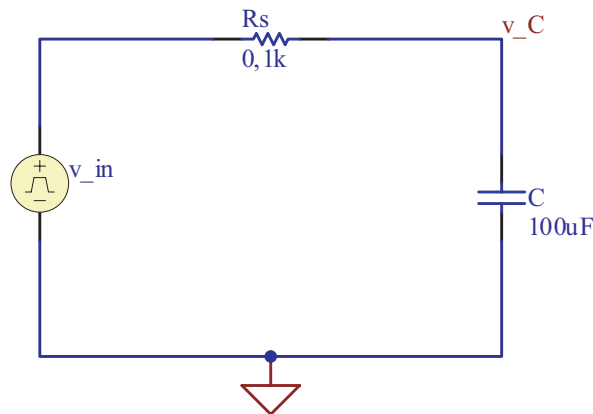
pri čemu $-j$ označava da između struje i napona postoji fazni pomeraaj od -90° .

¹Da bi došlo do promene napona, potrebno je pokretanje naelektrisanja ka oblogama, što rezultira pojavom struje.

Treba primetiti da je reaktansa inverzno proporcionalna učestanosti, što govori da će se kondenzator manje suprotstavljati češćim promenama napona na njemu. Ovo znači da se kondenzator na veoma niskim učestanostima u kolu ponaša kao prekid (tj. struja kroz njega se može zanemariti), a na veoma visokim učestanostima kao kratak spoj. Frekventna karakteristika, odnosno zavisnost reaktanse od učestanosti je sastavni deo tehničke specifikacije koju daju proizvođači kondenzatora i na nju treba obratiti pažnju prilikom projektovanja kola.

3.2.1 Prelazni režim kondenzatora

Radi detaljnijeg sagledavanja procesa punjenja i pražnjenja kondenzatora, biće razmotreno kolo sa Sl. 3.5. U kolu se kao pobuda nalazi izvor



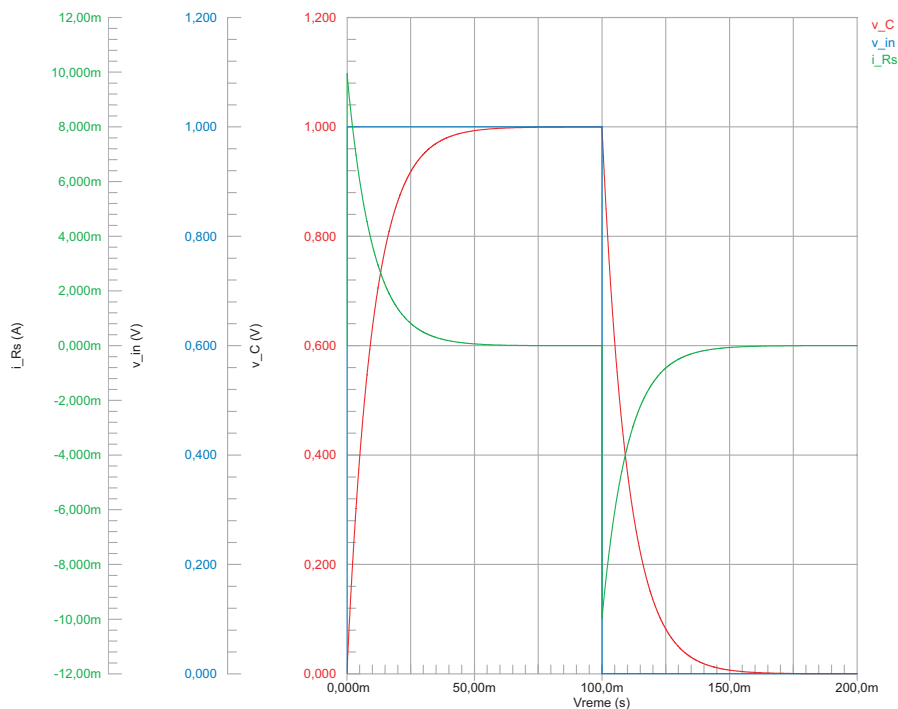
Slika 3.5: RC kolo sa povorkom impulsa kao pobudom.

v_{in} koji daje povorku impulsa sa Sl. 2.12, pri čemu je perioda signala $T = 200$ ms, vreme trajanja impulsa $t_0 = T/2$, a amplituda $V_0 = 1$ V. Pojava otpornika R_s u kolu posledica je činjenice da se u realnom slučaju svi izvori karakterišu unutrašnjom otpornošću, a kondenzatori ekvivalentnom rednom otpornošću². Pored toga, u realnim kolima se procesi punjenja i pražnjenja kondenzatora uvek odvijaju preko neke aktivne ili pasivne komponente, tj. preko njene unutrašnje otpornosti. S obzirom da su sve te otpornosti redne, to se njihov zbir može predstaviti jednim ekvivalentnim otpornikom³.

²Ekvivalentna redna otpornost kondenzatora skraćeno se naziva ESR (*equivalent series resistance*). Pored redne, u ekvivalentnoj šemi kondenzatora postoji i paralelna otpornost. Linije veza takođe imaju svoju otpornost

³Vrednost R_s na Sl. 3.5 ne odražava nužno realnu vrednost ekvivalentnih rednih otpornosti, već je, kao i još neke vrednosti u ovom tekstu, odabrana tako da omogući kvalitetniju ilustraciju opisanog efekta i lakše „pručno“ izračunavanje.

Struja kroz kolo, napon na kondenzatoru i ulazni napon tokom jedne periode, prikazani su na Sl. 3.6. Vremenska zavisnost promene napona na



Slika 3.6: Ulazni napon, napon na kondenzatoru i struja u kolu sa Sl. 3.5 tokom jedne periode.

kondenzatoru je:

$$v_C(t) = v_{in}(t) - i_{R_s}(t)R_s = V_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{R_s C}\right) \right]. \quad (3.6)$$

Razmatranje iz koga proizilazi (3.6) izloženo je u Dodatku D.

Iz (3.6) se zaključuje da će promena napona na kondenzatoru zavistiti od vrednosti amplitude V_0 i proizvoda $R_s C$ koji se naziva vremenska konstanta τ (*time constant*) ili RC konstanta kola. U ovom slučaju je $\tau = R_s C = 10$ ms, pa je u $t = T/2 = 100$ ms, kada amplituda impulsa pada na nulu, prema (3.6), $v_C(T/2) = 1 \cdot (1 - e^{-10}) \simeq 1$ V, jer je $1 \gg e^{-10}$. Bez obzira na činjenicu da, formalno gledano, iz (3.6) proizilazi da je $v_C = V_0$ kada $t \rightarrow \infty$, može se reći da je u praksi $v_C \simeq V_0$ već za $t = 4R_s C$, kao što se i primećuje sa Sl. 3.6. U tom slučaju se može smatrati da je $i_{R_s} \simeq 0$.

Kada je $t > T/2$ impuls se prekida, odnosno amplituda postaje $V_0 = 0$ V. Tada počinje proces pražnjenja kondenzatora, tj. kondenzator počinje da „vraća“ energiju izvoru i struja u kolu menja smer. Kao što se vidi sa Sl. 3.6,

proces pražnjenja se vremenski odvija analogno procesu punjenja:

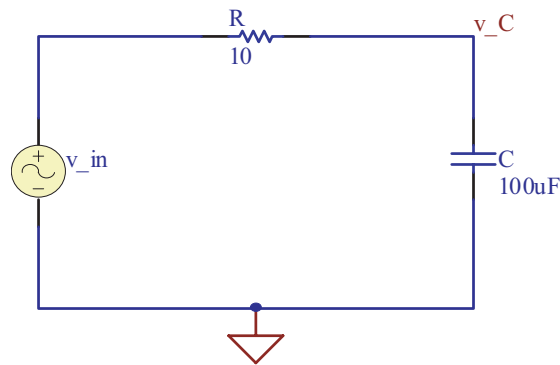
$$v_C(t) = V_0 \exp\left(-\frac{t}{R_s C}\right). \quad (3.7)$$

Kada kroz kolo prestane da teče struja, kondenzator se ispraznio i nastaje ravnotežna situacija kakva je bila i pre početka dejstva impulsa.

Treba primetiti da se kondenzator ne mora napuniti do vrednosti amplitude signala i isprazniti do nule, što zavisi od odnosa $t_0/R_s C$. Pored toga, iz praktičnih razloga treba razmotriti situaciju kada se na ulaz kola umesto povorke impulsa dovodi sinusni signal.

3.3 RC kolo

Na Sl. 3.7 prikazano je RC kolo sa sinusnim signalom amplitude $V_0 = 1 \text{ V}$ i učestanosti $f = 50 \text{ Hz}$ kao pobudom. Impedansa ovog kola je zbir



Slika 3.7: RC kolo sa sinusnom pobudom.

otpornosti i reaktanse:

$$\mathbf{Z} = R - jX_C. \quad (3.8)$$

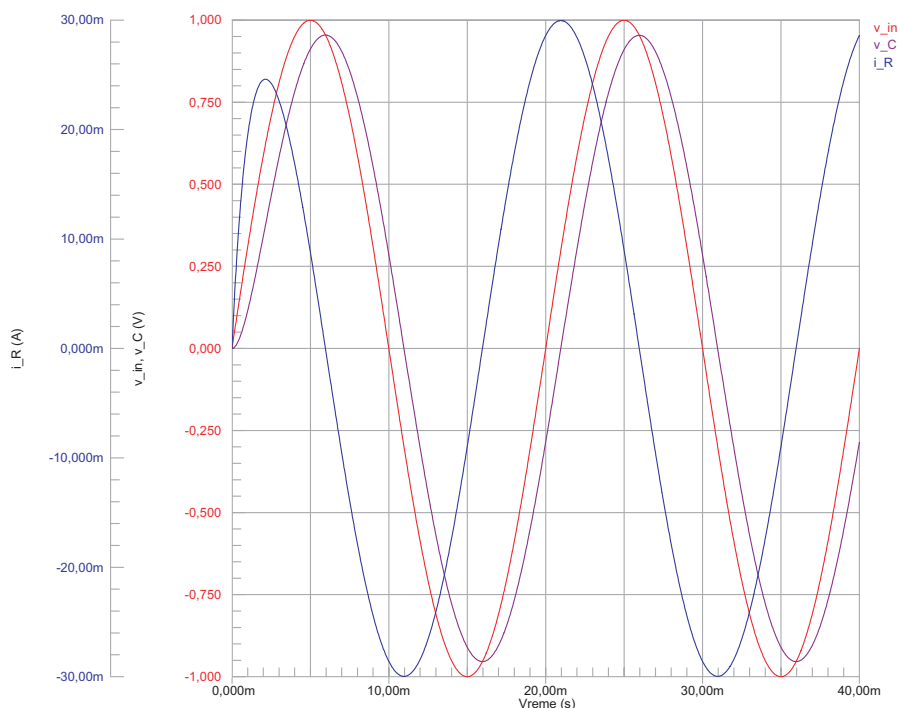
Izračunavanjem vrednosti (3.8) dobija se $\mathbf{Z} = 10 - j31,831 \Omega$ ili, u polarnoj reprezentaciji (videti Sl. 2.4), $\mathbf{Z} = 33,365 \Omega \angle -72,56^\circ$. Ako se ulazni napon v_{in} proglašava za referentni signal, struja u kolu je, na osnovu (3.1):

$$\mathbf{I}_R = \frac{\mathbf{V}_{in}}{\mathbf{Z}} = \frac{1 \text{ V} \angle 0^\circ}{33,365 \Omega \angle -72,56^\circ} \simeq 30 \text{ mA} \angle 72,56^\circ. \quad (3.9)$$

To znači da će struja u kolu prednjačiti za $72,56^\circ$ u odnosu na ulazni napon, što je uočljivo sa Sl. 3.8.

Na osnovu kola sa Sl. 3.7 i (3.3) može se napisati:

$$v_{in} = v_R + v_C = Ri_R + v_C = RC \frac{dv_C}{dt} + v_C, \quad (3.10)$$



Slika 3.8: Ulazni napon, napon na kondenzatoru i struja u RC kolu.

pri čemu je $i_R \equiv i_C$ struja kroz kolo. Pošto je ulazni napon sinusnog oblika, izraz (3.10) postaje:

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = V_0 \sin(\omega t). \quad (3.11)$$

Rešavanjem diferencijalne jednačine (3.11), uz početni uslov da je za $t = 0$ napon $v_C = 0$, dobija se napon na kondenzatoru⁴:

$$v_C = \frac{V_0}{1 + (\omega RC)^2} \left[\sin(\omega t) + \omega RC \left(\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) - \cos(\omega t) \right) \right]. \quad (3.12)$$

Na osnovu (3.3) i (3.12) dobija se i struja kroz kolo:

$$i_R = \frac{\omega CV_0}{1 + (\omega RC)^2} \left(\cos(\omega t) - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + \omega RC \sin(\omega t) \right). \quad (3.13)$$

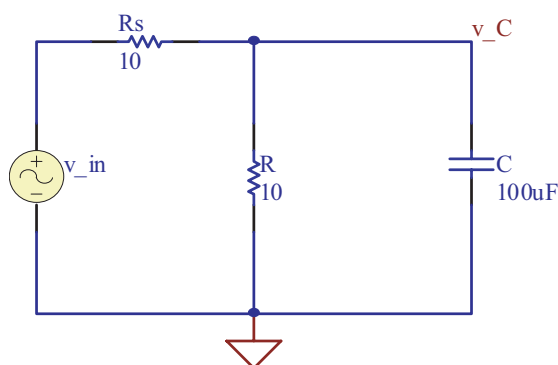
Napon v_C i struja i_R prikazani su na Sl. 3.8. Treba obratiti pažnju na to da u kolu postoji prelazni režim, tj. da struja i_R ne dostiže odmah vrednost koju bi imala ako bi se kolo razmatralo u stacionarnom stanju (*steady-state*) koje podrazumeva da napon v_{in} deluje dovoljno dugo. Postojanje prelaznog režima posledica je činjenice da je kondenzator na početku delovanja napona

⁴Tehnika rešavanja (3.11) data je u Dodatku E.

v_{in} prazan, pa je celokupan pad napona u kolu jednak padu napona na otporniku. U prvoj poluperiodi, sa porastom napona v_{in} raste i količina naboja na oblogama kondenzatora, usled čega na njemu dolazi do pojave napona v_C koji teži da smanji struju i_R . Kada napon na kondenzatoru v_C dostiže maksimum, struja i_R je jednaka nuli, a napon v_{in} je već počeo da opada. Nakon toga, kondenzator počinje da se prazni, a struja u kolu menja smer. Važno je uočiti da u trenutku kada je $v_{in} = 0$ na kondenzatoru još uvek postoji napon $v_C > 0$. Upravo zahvaljujući ovom „zaostalom“ naponu struja i_R dostiže tokom negativne poluperiode veću amplitudu nego što ju je imala tokom pozitivne poluperiode. Veličina sledeće amplitude i_R zavisice od veličine napona v_C koji je „zaostao“ prilikom prelaska napona v_{in} iz negativne u pozitivnu poluperiodu, sve dok se u kolu ne uspostavi stacionarno stanje, kao što je ilustrovano na Sl. 3.8. Za datu učestanost napona v_{in} , vreme trajanja prelaznog režima⁵, a samim tim i talasni oblici napona v_C i struje i_R , zavise od RC konstante. Sa smanjenjem vrednosti R , talasni oblici se približavaju oblicima sa Sl. 3.4, a sa povećanjem vrednosti R onima sa Sl. 3.2.

3.3.1 RC kolo sa paralelnim otpornikom

Na Sl. 3.9 prikazano je RC kolo, kod koga se paralelno kondenzatoru nalazi otpornik. Na ulaz kola se dovodi sinusni napon v_{in} amplitude $V_0 = 1$ V i učestanosti $f = 50$ Hz. Neka je ovaj napon i referentni u kolu.



Slika 3.9: RC kolo sa paralelnim otpornikom.

Ukupna impedansa kola je:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{R_s} + \mathbf{Z}_R \parallel \mathbf{Z}_C = \mathbf{Z}_{R_s} + \frac{1}{\frac{1}{\mathbf{Z}_R} + \frac{1}{\mathbf{Z}_C}}, \quad (3.14)$$

⁵U literaturi se često kolo sa Sl. 3.7 razmatra isključivo u stacionarnom stanju, sa zanemarivanjem prelaznog režima. Matematički, prelazni režim je opisan eksponencijalnim članom u (3.12) i (3.13).

pri čemu je:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_R &= R + j0 \\ \mathbf{Z}_{R_s} &= R_s + j0 \\ \mathbf{Z}_C &= 0 - j\frac{1}{\omega C} . \end{aligned} \quad (3.15)$$

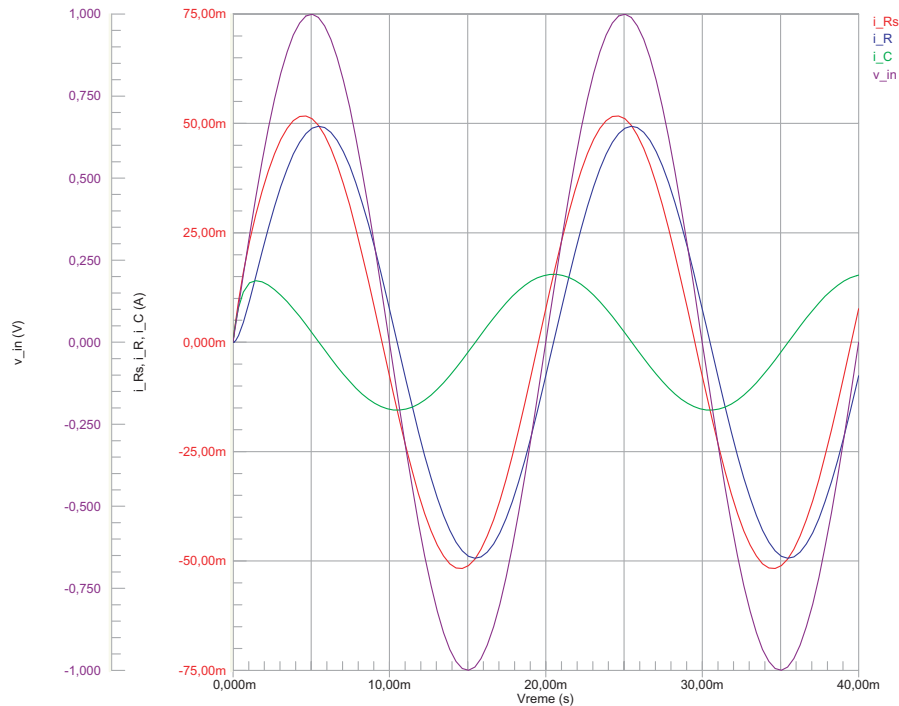
Zamenom numeričkih vrednosti (3.15) u (3.14) dobija se:

$$\mathbf{Z} = 19,10 - j2,86 = 19,31 \Omega \angle -8,52^\circ .$$

na osnovu čega je struja kroz otpornik R_s :

$$\mathbf{I}_{R_s} = \frac{\mathbf{V}_{in}}{\mathbf{Z}} = 517,8 \text{ mA} \angle 8,52^\circ . \quad (3.16)$$

To znači da struja kroz otpornik R_s prednjači u odnosu na ulazni napon za $\varphi = 8,52^\circ$. Ova struja, koja predstavlja zbir struja koje teku kroz grane kola u kojima se nalaze otpornik R i kondenzator C , prikazana je na Sl. 3.10. Struje kroz grane kola se mogu izračunati na osnovu:



Slika 3.10: Ulazni napon i struje u RC kolu sa paralelnim otpornikom.

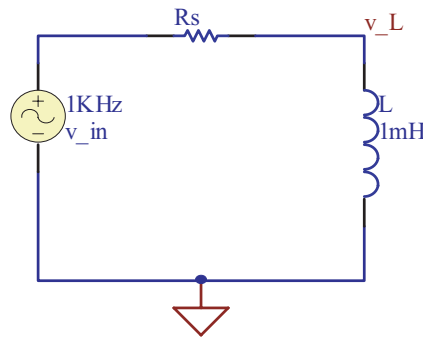
$$\mathbf{V}_R = \frac{\mathbf{Z}_R \parallel \mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}} \mathbf{V}_{in} . \quad (3.17)$$

Treba napomenuti da kolo sa Sl. 3.9, bez izvora v_{in} , u stvari predstavlja ekvivalentno kolo kondenzatora, pri čemu je otpornik R_s ekvivalentna serijska otpornost izvoda, a otpornik R ekvivalentna paralelna otpornost tela, dok je C idealna kapacitivnost.

3.4 Kalem u AC kolu

Na Sl. 3.11 prikazano je AC kolo sa kalemom kao opterećenjem. Kao i u slučaju kondenzatora u AC kolu (videti 3.2 i na ovom mestu će, radi jednostavnosti razmatranja, redna otpornost R_s biti zanemarena.

Primedba: U programu za simulaciju kola SPICE, kalem se ne može direktno priključiti na izvor jer ugrađeni numerički model dovodi do greške. Zbog toga se kalemu na red priključuje otpornik male otpornosti, koja može biti i simbolične vrednosti, npr. $1\text{ m}\Omega$ ili manja, kao što je to u ovom primeru.



Slika 3.11: Kalem u AC kolu.

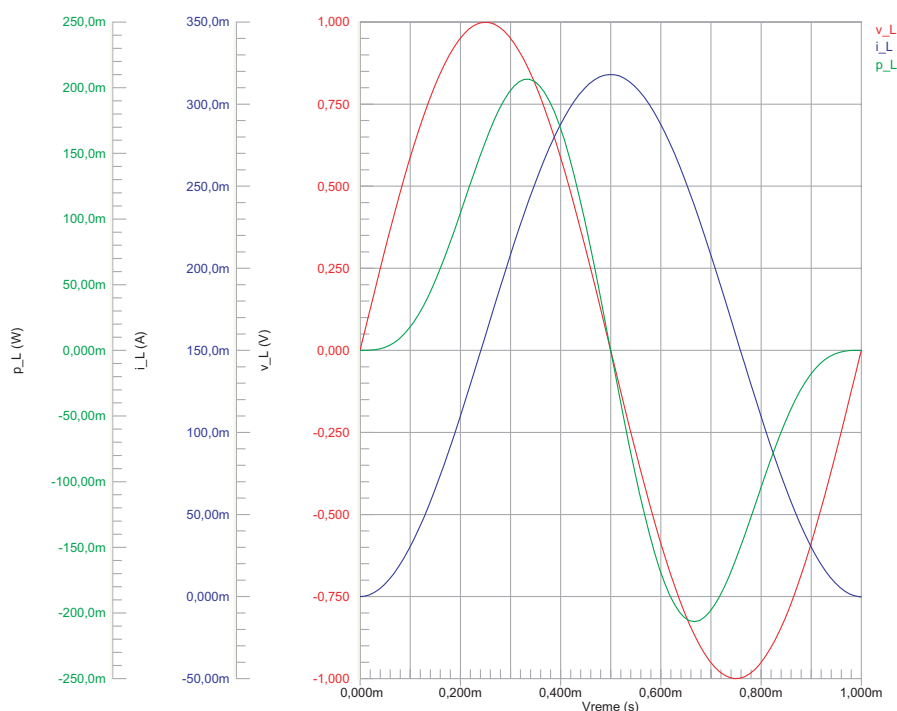
Dovođenje naizmeničnog napona na kalem (*inductor*) izaziva naizmeničnu promenu struje kroz njega. Na krajevima kalema se indukuje napon v_L , koji je direktno proporcionalan promeni te struje u vremenu:

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} . \quad (3.18)$$

Može se reći da se kalem indukcijom napona suprotstavlja promeni struje kroz njega koje mu „nameće“ izvor v_{in} . Izraz (3.18) ukazuje da će napon na kalemu biti najveći kada je promena struje u vremenu najveća, a da će biti jednak nuli kada je ta promena jednaka nuli, što je ilustrovano na Sl. 3.12.

S obzirom da je za protok struje kroz kalem potrebna promena napona na njegovim krajevima⁶, na osnovu Sl. 3.12 se može reći da napon na kalemu v_L prednjači u odnosu na struju i_L za 90° . Promena snage sa Sl. 3.12

⁶Ovo je suprotno ponašanju kondenzatora, kod koga je za promenu napona na njegovim oblogama potreban protok naelektrisanja kroz kolo, tj. uspostavljanje struje (videti 3.2).



Slika 3.12: Napon, struja i snaga na kalem u AC kolu.

je takođe naizmenična, što govori da kalem kontinualno ne disipira snagu u vremenu kao otpornik, već vrši naizmeničnu apsorpciju i oslobađanje energije.

Opisani proces reakcije kalema na promene struje u vremenu se može kvantifikovati veličinom koja se naziva **reaktansa** kalema:

$$X_L = \omega L = 2\pi fL \quad [\Omega], \quad (3.19)$$

pa se impedansa kola, na osnovu (2.3) i Sl. 2.4, može napisati kao:

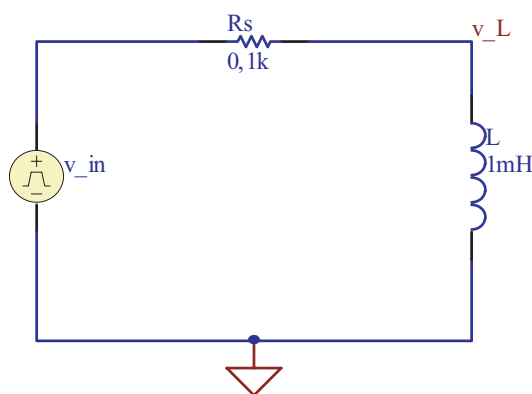
$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_L = 0 + jX_L = j\omega L, \quad (3.20)$$

pri čemu j označava da između struje i napona postoji fazni pomeraj od 90° .

Treba primetiti da je reaktansa direktno proporcionalna učestanosti, što govori da će se kalem više suprotstavljati češćim promenama struje kroz njega. Ovo znači da se kalem na veoma niskim učestanostima u kolu ponaša kao kratak spoj (tj. napon na njemu se može zanemariti), a na veoma visokim učestanostima kao prekid. Frekventna karakteristika, odnosno zavisnost reaktanse od učestanosti je sastavni deo tehničke specifikacije koju daju proizvođači kalema i na nju treba obratiti pažnju prilikom projektovanja kola.

3.4.1 Prelazni režim kalema

Proces uspostavljanja struje kroz kalem nije trenutni, već je, slično kao i za punjenje kondenzatora, za to potrebno izvesno vreme. Ovde će biti razmotren slučaj kada se na ulaz kola sa Sl. 3.13 dovodi povorka impulsa v_{in} sa Sl. 2.12, pri čemu je perioda signala $T = 200 \mu s$, vreme trajanja impulsa $t_0 = T/2$ i amplituda $V_0 = 1 V$.



Slika 3.13: RL kolo sa povorkom impulsa kao pobudom.

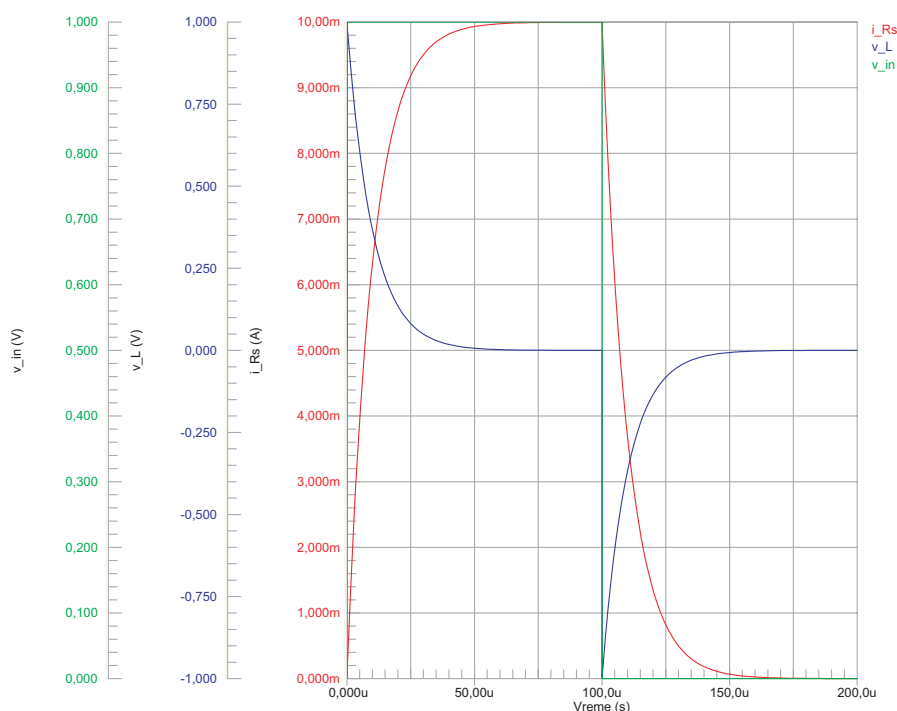
Ulazni napon, napon na kalemu i struja u kolu tokom jedne periode prikazani su na Sl. 3.14. Promena struje u vremenu je:

$$i_{R_s} = \frac{V_0}{R_s} \left[1 - \exp\left(-\frac{R_s}{L}t\right) \right], \quad (3.21)$$

Razmatranje iz koga proizilazi (3.21) izloženo je u Dodatku F. Odnos $\tau = L/R_s$ predstavlja vremensku konstantu kola. U ovom slučaju je $L/R_s = 10 \mu s$, pa je u $t = T/2 = 100 \mu s$, kada amplituda impulsa pada na nulu $i_{R_s}(T/2) = V_0(1 - e^{-10})/R_s \simeq V_0/R = 10 \text{ mA}$. Formalno gledano, na osnovu (3.21) se zaključuje da struja dostiže vrednost V_0/R_s kada $t \rightarrow \infty$. Međutim, u praksi se može smatrati da je ova vrednost dostignuta već za $t = 4L/R_s$, što se i primećuje sa Sl. 3.14, nakon čega napon na kalemu pada na nulu (tj. kalem počinje da se ponaša kao kratak spoj), a struja kroz kolo postaje konstantna i jednaka vrednosti V_0/R . Po prestanku delovanja impulsa kalem apsorbovanu energiju „vraća“ u kolo, pa je struja:

$$i_{R_s} = \frac{V_0}{R_s} \exp\left(-\frac{R_s}{L}t\right). \quad (3.22)$$

Uočava se da je vremenska konstanta kola L/R_s od presudnog značaja za karakterizaciju prelaznog režima. Pored toga, za primenu u praksi interesantno je i razmatranje ponašanja RL kola sa sinusnom pobudom.



Slika 3.14: Ulazni napon, napon na kalemu i struja u kolu sa Sl. 3.13 tokom jedne periode.

3.5 RL kolo

Na Sl. 3.15 prikazano je RL kolo sa sinusnom signalom amplitude $V_0 = 1\text{ V}$ i učestanosti $f = 50\text{ Hz}$ kao pobudom. Impedansa ovog kola je zbir otpornosti i reaktanse:

$$\mathbf{Z} = R + jX_L . \quad (3.23)$$

Izračunavanjem vrednosti (3.23) dobija se $\mathbf{Z} = 1 + j0,314\ \Omega$ ili, u polarnoj reprezentaciji (videti Sl. 2.4), $\mathbf{Z} = 1,048\ \Omega \angle 17,43^\circ$. Ako se ulazni napon v_{in} proglasi za referentni signal, struja u kolu je, na osnovu (3.1):

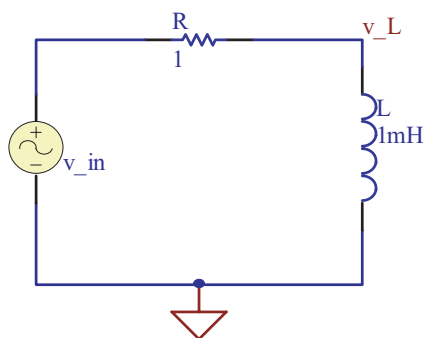
$$\mathbf{I}_R = \frac{\mathbf{V}_{in}}{\mathbf{Z}} = \frac{1\text{ V} \angle 0^\circ}{1,048\ \Omega \angle 17,43^\circ} \simeq 0,954\text{ A} \angle -17,43^\circ . \quad (3.24)$$

To znači da će struja u kolu kasniti za $17,43^\circ$ u odnosu na ulazni napon, što je uočljivo sa Sl. 3.16.

Na osnovu kola sa Sl. 3.15 i (3.18) može se napisati:

$$v_{in} = v_R + v_L = Ri_R + L \frac{di_R}{dt} , \quad (3.25)$$

pri čemu je $i_R \equiv i_L$ struja kroz kolo. Pošto je ulazni napon sinusnog oblika,



Slika 3.15: RL kolo sa sinusnom pobudom.

izraz (3.25) postaje:

$$L \frac{di_R}{dt} + Ri_R = V_0 \sin(\omega t). \quad (3.26)$$

Rešavanjem diferencijalne jednačine (3.26), uz početni uslov da je za $t = 0$ struja $i_R = 0$, dobija se struja kroz kolo⁷:

$$i_R = \frac{V_0}{R(1 + (\frac{\omega L}{R})^2)} \left[\sin(\omega t) + \frac{\omega L}{R} \left(\exp(-\frac{R}{L}t) - \cos(\omega t) \right) \right]. \quad (3.27)$$

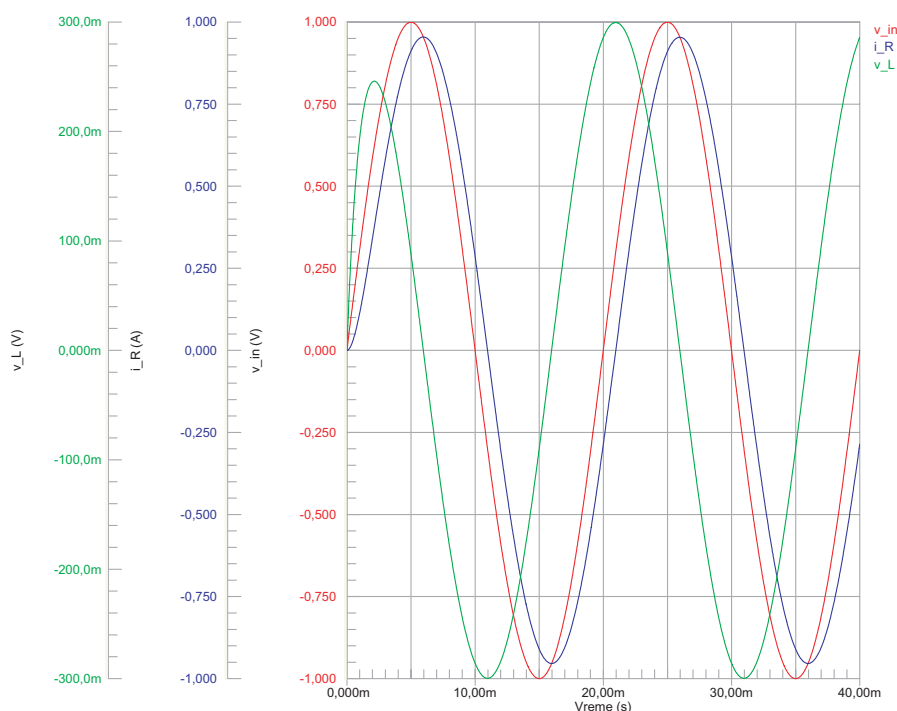
Na osnovu (3.18) i (3.27) dobija se i napon na kalem:

$$v_L = \frac{\omega L}{R} \frac{V_0}{1 + (\frac{\omega L}{R})^2} \left(\cos(\omega t) - \exp(-\frac{R}{L}t) + \frac{\omega L}{R} \sin(\omega t) \right). \quad (3.28)$$

Napon v_L i struja i_R prikazani su na Sl. 3.16. Treba obratiti pažnju na to da u kolu postoji prelazni režim, tj. da napon v_L ne dostiže odmah vrednost koju bi imao ako bi se kolo razmatralo u stacionarnom stanju, koje podrazumeva da napon v_{in} deluje dovoljno dugo. U prvoj poluperiodi, sa porastom napona v_{in} raste i struja kroz kalem koja indukuje kontraelektromotornu silu, koja teži da smanji napon v_L . Kada struja kroz kalem i_R dostiže maksimum, napon v_L je jednak nuli, a napon v_{in} je već počeo da opada. Nakon toga, kalem počinje da se „prazni“ i napon na njegovim krajevima postaje negativan. Važno je uočiti da u trenutku kada je $v_{in} = 0$ kroz kalem još uvek teče struja $i_R > 0$. Upravo zahvaljujući ovoj „zaostaloj“ struji napon v_L dostiže tokom negativne poluperiode veću amplitudu nego što je bila tokom pozitivne poluperiode. Veličina sledeće amplitude v_L zavisice od struje i_R koji je „zaostala“ prilikom prelaska napona v_{in} iz negativne u pozitivnu poluperiodu, sve dok se u kolu ne uspostavi stacionarno stanje, kao što je ilustrovano na Sl. 3.8. Za datu učestanost napona v_{in} , vreme trajanja prelaznog režima⁸, a samim tim i talasni oblici napona

⁷Tehnika rešavanja (3.26) ekvivalentna je onoj opisanoj u Dodatku E.

⁸Matematički, prelazni režim je opisan eksponencijalnim članom u (3.27) i (3.28).



Slika 3.16: Ulazni napon, napon na kalemu i struja u RL kolu.

v_L i struje i_R , zavise od L/R konstante. Sa smanjenjem vrednosti R , talasni oblici se približavaju oblicima sa Sl. 3.12, a sa povećanjem vrednosti R onima sa Sl. 3.2.

3.5.1 RL kolo sa paralelnim otpornikom

Na Sl. 3.17 prikazano je RL kolo, kod koga se paralelno kalemu nalazi otpornik. Na ulaz kola se dovodi sinusni napon v_{in} amplitude $V_0 = 1$ V i učestanosti $f = 50$ Hz. Neka je ovaj napon i referentni u kolu.

Ukupna impedansa kola je:

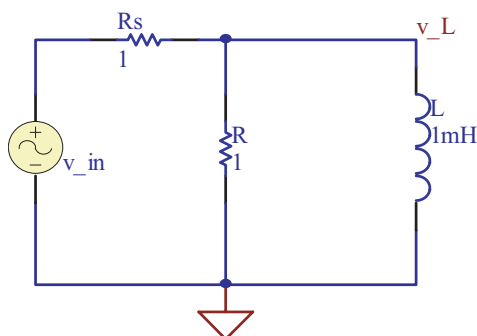
$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{R_s} + \mathbf{Z}_R \parallel \mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{R_s} + \frac{1}{\frac{1}{\mathbf{Z}_R} + \frac{1}{\mathbf{Z}_L}}, \quad (3.29)$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_R &= R + j0 \\ \mathbf{Z}_{R_s} &= R_s + j0 \\ \mathbf{Z}_L &= 0 + j\omega L. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Zamenom numeričkih vrednosti (3.30) u (3.29) dobija se:

$$\mathbf{Z} = 1,09 + j0,286 = 1,127 \Omega \angle 14,70^\circ,$$



Slika 3.17: RL kolo sa paralelnim otpornikom.

na osnovu čega je struja kroz otpornik R_s :

$$\mathbf{I}_{R_s} = \frac{\mathbf{V}_{in}}{\mathbf{Z}} = 0,89 \text{ A} \angle -14,70^\circ . \quad (3.31)$$

To znači da struja kroz otpornik R_s kasni u odnosu na ulazni napon za $\varphi = 14,70^\circ$. Ova struja, koja predstavlja zbir struja koje teku kroz grane kola u kojima se nalaze otpornik R i kalem L , prikazana je na Sl. 3.18. Struje kroz grane kola se mogu izračunati pomoću (3.17).

Treba primetiti da ekvivalentno kolo kalema, pored redne otpornosti, može sadržati i parazitnu kapacitivnost koja je paralelno vezana sa idealnom induktivnošću.

3.6 RLC kolo

Na Sl. 3.19 prikazano je RLC kolo sa signalom amplitude $V_0 = 1 \text{ V}$ i učestanosti $f = 50 \text{ Hz}$ kao pobudom.

Impedansa ovog kola je:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_L , \quad (3.32)$$

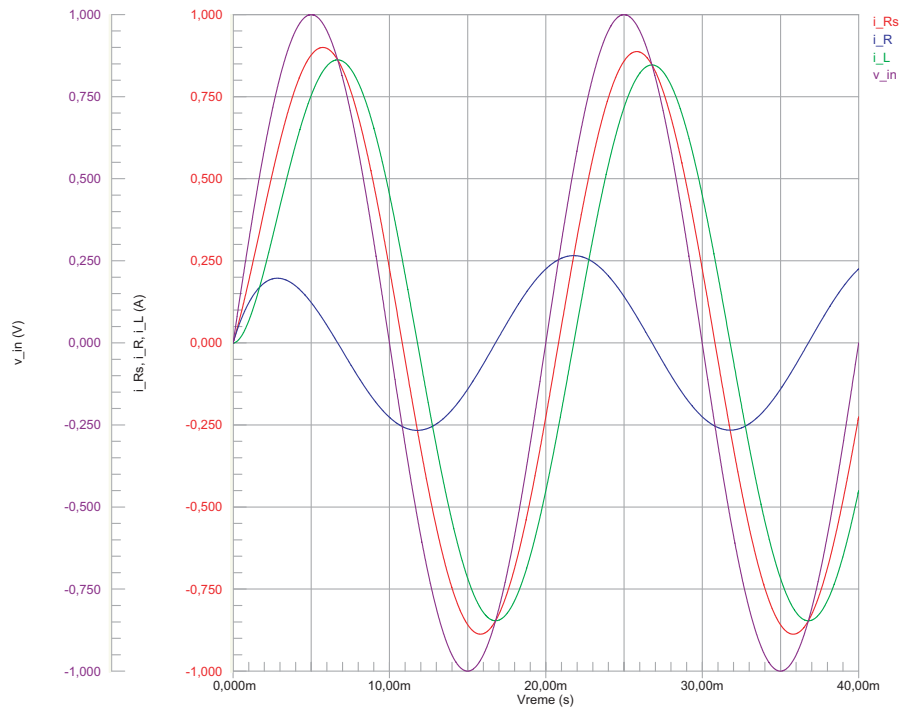
pri čemu je:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_R &= R + j0 \\ \mathbf{Z}_C &= 0 - j\frac{1}{\omega C} \\ \mathbf{Z}_L &= 0 + j\omega L . \end{aligned} \quad (3.33)$$

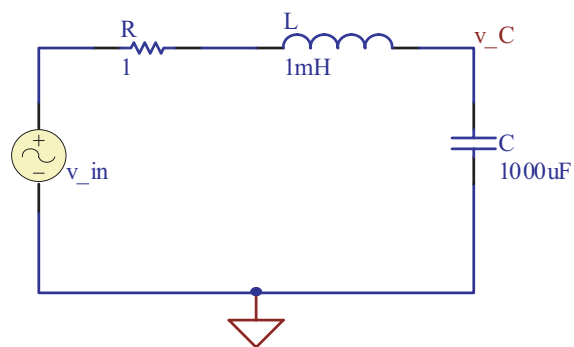
Struja kroz kolo je:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_{in}}{\mathbf{Z}} = 0,329 \text{ A} \angle 70,78^\circ , \quad (3.34)$$

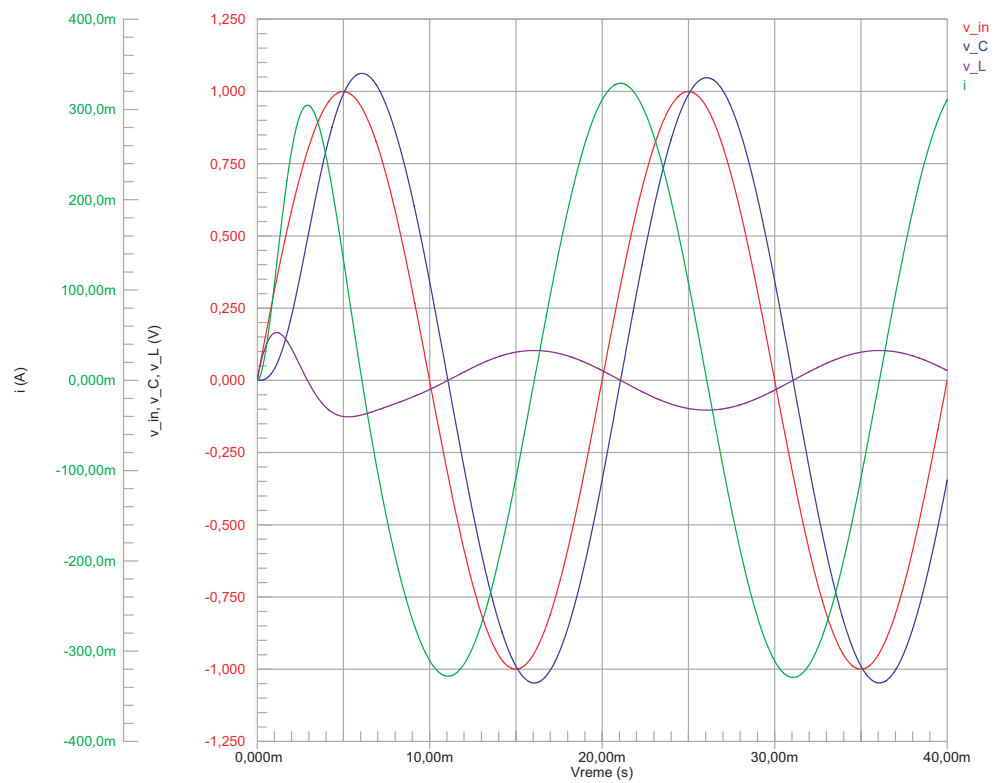
što znači da prednjači u odnosu na ulazni napon za ugao $\varphi = 70,78^\circ$, kao što je ilustrovano na Sl. 3.20.



Slika 3.18: Ulazni napon i struje u RL kolu sa paralelnim otpornikom.



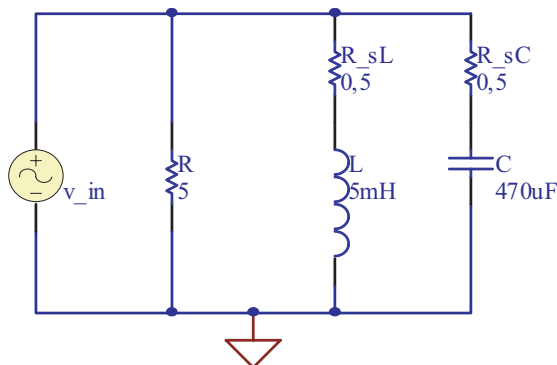
Slika 3.19: RLC kolo sa sinusnom pobudom.



Slika 3.20: Naponi i struja u RLC kolu.

Sa Sl. 3.20 se uočava da je amplituda napona na kondenzatoru veća od amplitude ulaznog napona. Na osnovu (3.32) je $\mathbf{Z} = 3,04 \Omega \angle -70,78^\circ$, dok je $\mathbf{Z}_C = 3,18 \Omega \angle -90^\circ$. Naime, kada je u RLC kolu ukupna impedansa manja bilo od impedanse kabela bilo od impedanse kondenzatora, tada je i struja kroz kolo veća nego što bi to bila u kolu u kojem se ovi elementi pojavljuju pojedinačno. Efekat naponskog premašenja je posledica suprotnih reaktansi kabela i kondenzatora i može se izbeći povećanjem otpornosti R , što predstavlja tehniku ograničavanja struje kroz kolo. Na primer, u kolu sa Sl. 3.19 je već za $R = 2 \Omega$ amplituda napona na kondenzatoru $V_{C0} \approx 0,9 \text{ V}$.

Na Sl. 3.21 prikazano je RLC kolo u paralelnoj konfiguraciji. Otpornici R_{sL} i R_{sC} predstavljaju redne otpornosti kabela i kondenzatora, respektivno. Na ulaz kola se dovodi sinusni signal amplitude $V_0 = 1 \text{ V}$ i učestnosti $f = 50 \text{ Hz}$. Impedansa ovog kola je:



Slika 3.21: RLC kolo u paralelnoj konfiguraciji.

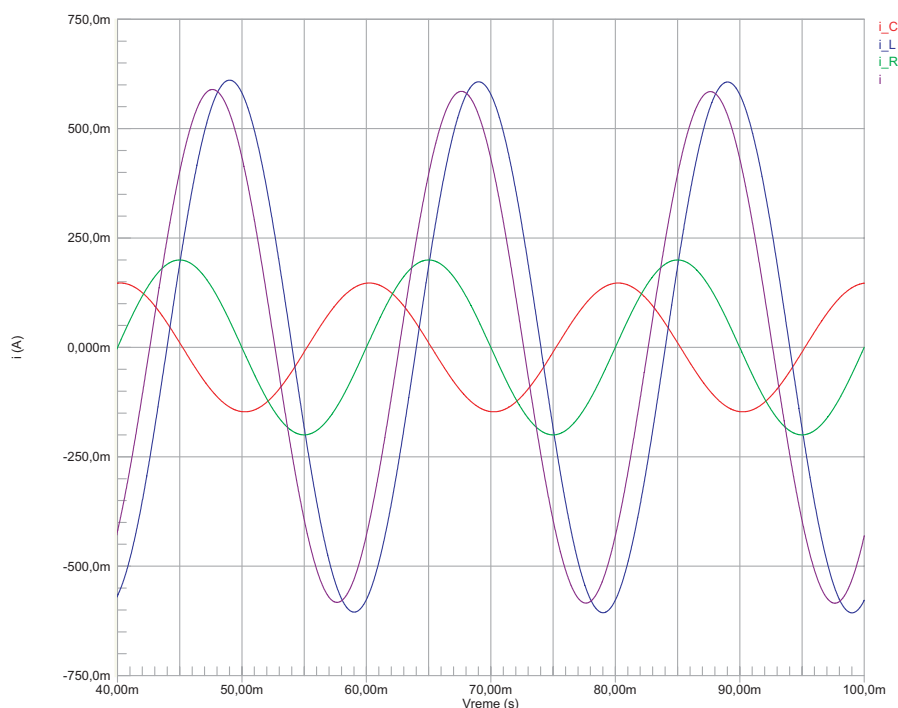
$$\mathbf{Z} = \left(\frac{1}{\mathbf{Z}_{(R)}} + \frac{1}{\mathbf{Z}_{(L)}} + \frac{1}{\mathbf{Z}_{(C)}} \right)^{-1}, \quad (3.35)$$

pri čemu su $\mathbf{Z}_{(R)}$, $\mathbf{Z}_{(L)}$ i $\mathbf{Z}_{(C)}$ impedanse kroz R , L i C granu kola, respektivno. Ukupna struja kroz kolo je:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_{in}}{\mathbf{Z}} = 0,585 \text{ A} \angle -47,49^\circ \quad (3.36)$$

i prikazana je na Sl. 3.22, zajedno sa strujama kroz grane kola u stacionarnom stanju. Struja kasni za ulaznim naponom⁹ za ugao $\varphi = 47,49^\circ$. Treba primetiti da je kod ovakvih kola lakše izračunati struje kroz grane kola, pa ih sabrati, nego računati ukupnu struju korišćenjem (3.35), tj. ukupne impedanse.

⁹Ulazni napon je u fazi sa naponom na otporniku R , pa mu je signal ekvivalentan signalu struje i_R sa Sl. 3.22.



Slika 3.22: Struje u RLC kolu sa Sl. 3.21

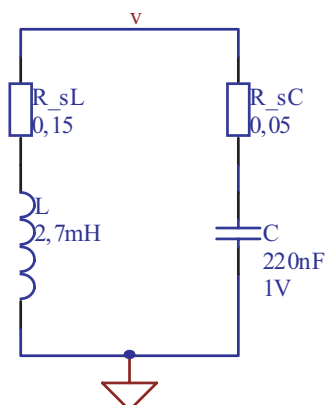
Prilikom izračunavanja parametara složenijih kola treba koristiti princip „podele“ kola na manje (redne i/ili paralelne) celine, čije je impedanse lakše izračunati po prethodno opisanim pravilima. Za kola većeg stepena složenosti, a posebno za ona u kojima se pojavljuju i aktivne komponente (diode, tranzistori, itd.) u današnjoj praksi se uglavnom koriste simulatori.

3.7 Rezonansa

Na osnovu razmatranja datih u 3.2 i 3.4 jasno je da se kondenzator i kalem ponašaju suprotno prilikom dejstva naizmeničnog napona. Kondenzator akumulira energiju izvora pomoću razdvajanja naelektrisanja, što prouzrokuje pojavu električnog polja, odnosno napona na njegovim krajevima. Kalem akumulira energiju izvora pomoću magnetne indukcije, što rezultuje pojavom struje kroz njega. Neka su ove dve komponente vezane paralelno, kao u kolu sa Sl. 3.23.

Ako se kolo trenutno pobudi jednosmernim naponom amplitude $V = 1$ V, kondenzator će se napuniti.

Primedba: U programu SPICE se trenutna pobuda ovog tipa može simulirati stavljanjem napona od 1 V kao početnog napona u modelu



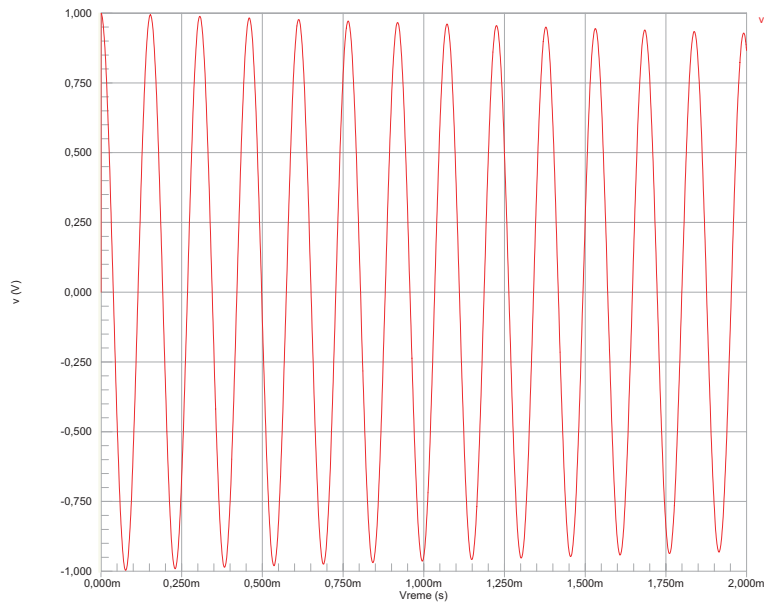
Slika 3.23: „Idealno“ rezonantno kolo.

kondenzatora.

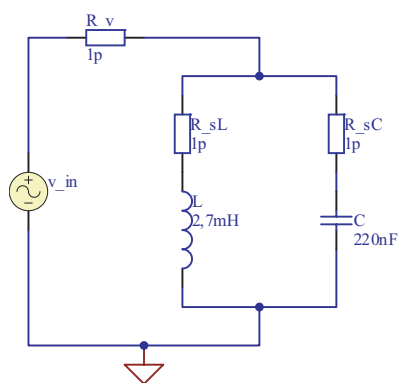
Po prestanku pobude kondenzator će početi da se prazni, što će izazvati porast struje kroz kalem i kontraelektromotornu silu koja teži da se suprotstavi porastu te struje. Kada se kondenzator isprazni, usled razlike napona na krajevima kalema, pojavljuje se struja u suprotnom smeru koja ponovo puni kondenzator, stvarajući na njegovim oblogama napon koji je po znaku suprotan od početnog. Kada se kalem „isprazni“, kondenzator se napunio i opisani proces se ciklično nastavlja u vremenu. Teorijski gledano, na ovaj način bi energija ostala zarobljena u kolu, prebacujući se sa kalema na kondenzator, beskonačno dugo. Međutim, u praksi uvek postoje gubici na rednim otpornostima obe komponente, kao i na otpornosti veza između komponenata, tako da se amplituda napona smanjuje u vremenu, kao što je ilustrovano na Sl. 3.24. Transfer energije između komponenata rezultira učestanošću promene napona f_r , a vrednost te učestanosti zavisi od vrednosti reaktansi kalema i kondenzatora. U praksi, ako se kolo sa Sl. 3.23 pobuđuje naizmeničnim signalom učestanosti f_r , u njemu će se uspostaviti stanje rezonanse. Učestanost pri kojoj se ova pojava dešava naziva se rezonantna učestanost i dobija se iz uslova da su reaktanse u granama kola jednake. Ako se zanemare redne otpornosti, iz uslova $\omega L = 1/\omega C$ rezonantna učestanost je:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (3.37)$$

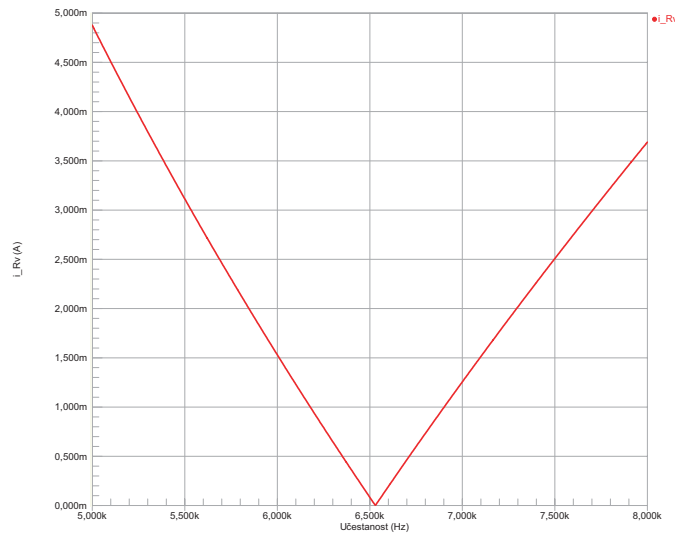
Efekat rezonanse se može uočiti analizom kola sa Sl. 3.25, kod koga su redne otpornosti predstavljene simboličnim vrednostima. Kolo se pobuđuje ulaznim signalom sinusnog oblika, amplitude $V_0 = 1\text{ V}$ i linearno promenljive učestanosti. Struja kroz otpornik R_v u zavisnosti od učestanosti prikazana je na Sl. 3.26. Uočljivo je da pri učestanosti $f_r = 6,53\text{ kHz}$ struja kroz otpornik R_v pada na nulu, što znači da se pri rezonantnoj učestanosti



Slika 3.24: Napon u „idealnom“ rezonantnom kolu.



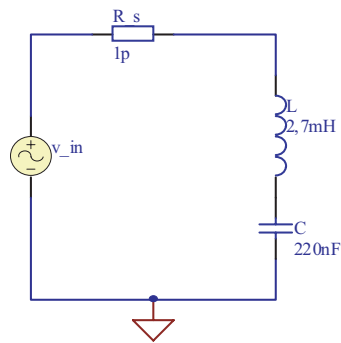
Slika 3.25: Kolo za analizu rezonantne učestanosti.



Slika 3.26: Zavisnost struje od učestanosti izvora v_{in} za kolo sa Sl. 3.25.

kolo ponaša kao otvoreno¹⁰.

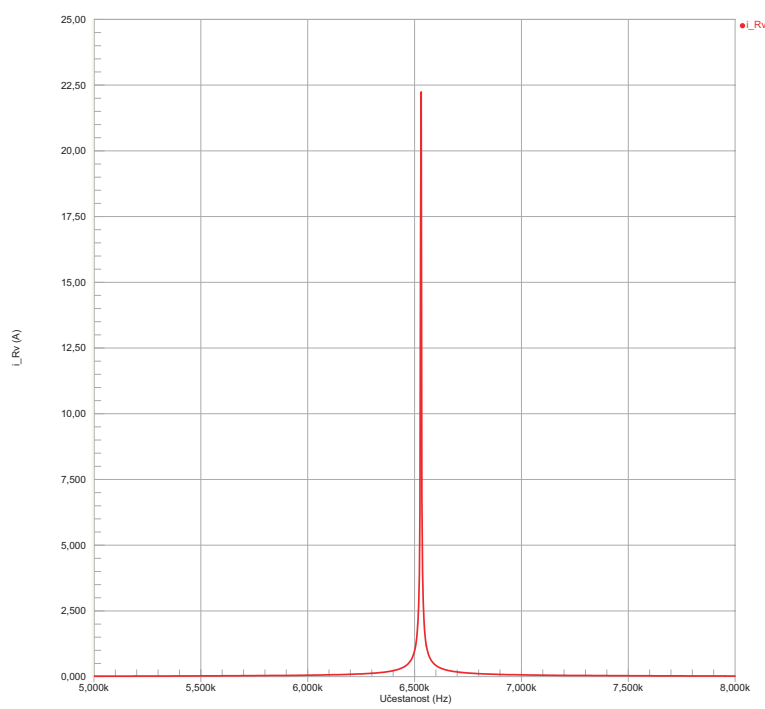
U slučaju kada su kalem i kondenzator vezani na red, kao što je to na Sl. 3.27, takođe se može uočiti pojava rezonanse, pri čemu je rezonantna učestanost određena izrazom (3.37). Zavisnost struje od učestanosti u ova-



Slika 3.27: Redno rezonantno kolo.

kvom kolu prikazana je na Sl. 3.28. Može se primetiti da se redna veza između kalema i kondenzatora u okolini rezonantne učestanosti ponaša kao kratak spoj i da kroz kolo teče jako velika struja. To znači da kod ovakvih kola treba biti izuzetno oprezan, jer se na kondenzatoru mogu pojaviti naponi znatno većih amplituda od amplitude pobudnog signala.

¹⁰S obzirom da je rezonantna učestanost dobijena izjednačavanjem reaktansi, to je ukupna impedansa kola $Z = Z_L \parallel Z_C \rightarrow \infty$, za $f = f_r$.



Slika 3.28: Zavisnost struje od učestanosti u rednom rezonantnom kolu.

Dodatak A

Brojevi u tehničkoj literaturi

A.1 Formati brojeva

Formati brojeva koji se koriste u tehničkoj literaturi su:

- sa fiksnim decimalnim zarezom (*fixed point*)
- sa pokretnim decimalnim zarezom (*floating point*)
- naučni (*scientific*)
- inženjerski (*engineering*)

Format brojeva **sa fiksnim decimalnim zarezom** podrazumeva da se decimalni zarez kod svakog broja pojavljuje uvek na istom mestu. Drugim rečima, broj decimalnih mesta je uvek konstantan.

Primer A.1.1 Brojevi prikazani u formatu sa fiksnim decimalnim zarezom:

0,25 11956,34 1215,00 4,84

Format brojeva **sa pokretnim decimalnim zarezom** podrazumeva promenljivi broj decimalnih mesta.

Primer A.1.2 Brojevi prikazani u formatu sa pokretnim decimalnim zarezom:

0,25 11956,348 1215 4,843333

Naučni format brojeva podrazumeva korišćenje stepena broja 10, pri čemu se decimalni zarez pojavljuje odmah nakon prvog broja koji je veći ili

Pod pojmom „tehnička literatura“ se u ovom tekstu podrazumeva pre svega literatura iz oblasti elektronike.

U anglosaksonskoj tehničkoj literaturi se umesto decimalnog zareza koristi decimalna tačka.

jednak jedinici, a manji od desetice. Broj mesta iza decimalnog zareza može biti fiksni ili promenljiv. Računari i kalkulatori prikazuju stepen broja deset korišćenjem slova „E“, tako da je $10^n \equiv En$.

Primer A.1.3 Brojevi prikazani u naučnom formatu:

$$\begin{array}{cccc} 2,5 \cdot 10^{-1} & 1,1956134 \cdot 10^4 & 1,215 \cdot 10^3 & 4,84 \cdot 10^0 \\ 2,5E-1 & 1,1956348E4 & 1,215E3 & 4,843333E0 \end{array}$$

Inženjerski format brojeva podrazumeva da je stepen broja 10 uvek jednak celobrojnom umnošku broja 3 (10^{3n}), pri čemu mantisa broja mora biti veća ili jednaka od jedan, a manja od hiljadu. Broj mesta iza decimalnog zareza može biti fiksni ili promenljiv.

Primer A.1.4 Brojevi prikazani u inženjerskom formatu:

$$\begin{array}{cccc} 250 \cdot 10^{-3} & 11,95634 \cdot 10^3 & 1,215 \cdot 10^3 & 4840 \cdot 10^{-3} \\ 250E-3 & 11,956348E3 & 1,215E3 & 4843,333E-3 \end{array}$$

Određeni brojevi u inženjerskoj notaciji imaju prefikse u SI sistemu jedinica, kao što je prikazano u Tab. A.1.

Prefiks	Simbol	Broj
ato (<i>atto</i>)	a	10^{-18}
femto (<i>femto</i>)	f	10^{-15}
piko (<i>pico</i>)	p	10^{-12}
nano (<i>nano</i>)	n	10^{-9}
mikro (<i>micro</i>)	μ	10^{-6}
mili (<i>milli</i>)	m	10^{-3}
kilo (<i>kilo</i>)	k	10^3
mega (<i>mega</i>)	M	10^6
giga (<i>giga</i>)	G	10^9
tera (<i>tera</i>)	T	10^{12}
peta (<i>peta</i>)	P	10^{15}
eksa (<i>exa</i>)	E	10^{18}

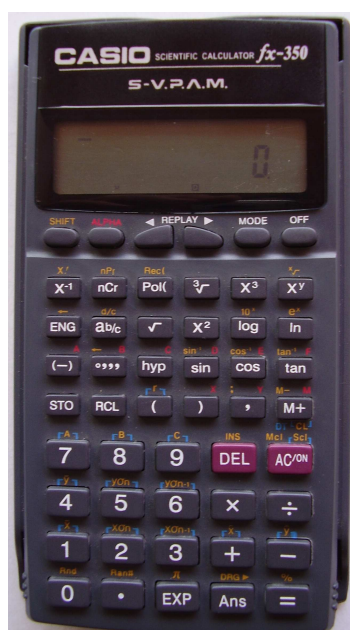
Tabela A.1: Prefiksi u SI sistemu

Prefiksi se u elektronici često koriste za procenu reda veličine vrednosti neke komponente ili parametra kola. Na primer, kaže se da je „kapacitivnost reda veličine mikrofarada“ ili da je „ulazna otpornost reda veličine megaoma“.

Broj cifara iza decimalnog zareza definiše **tačnost** sa kojom je broj *izračunat*. Broj cifara iza decimalnog zareza sa kojim je izračunati broj *prikazan* određuje **preciznost** prikaza. Prilikom prikazivanja brojeva uobičajeno se vrši zaokruživanje na određenom decimalnom mestu, koje predstavlja broj značajnih cifara (na primer: $3,67804327 \simeq 3,68$ – zaokruživanje na dve značajne cifre).

A.2 Upotreba kalkulatora

Računari i kalkulatori sa tehničkim funkcijama mogu prikazati brojeve u bilo kom od prethodno opisanih formata. Kod računara, svaki programski jezik poseduje specifične naredbe za formatiranje prikaza brojeva. Takođe, standardni kalkulatori na računaru poseduju režim tehničkih funkcija (tipično: *View* → *Scientific*), dok se format prikaza brojeva bira određenim tasterom (tipično tasterom F-E). Ručni kalkulatori sa tehničkim funkcijama (Sl. A.1) poseduju režime prikaza za različite formate brojeva.



Slika A.1: Tipičan kalkulator sa tehničkim funkcijama.

Primer A.2.1 Kalkulator sa Sl. A.1 se uvodi u režim prikaza brojeva u formatu sa fiksnim decimalnim zarezom i četiri decimalna mesta pritiskom tastera po sledećem redosledu:

MODE → MODE → MODE → 1 → 4

Prikaz na displeju će biti: 0.0000.

Za prikaz brojeva u naučnom formatu sa pet decimalnih mesta, koji će biti korišćen u narednim primerima, koristi se sledeća sekvenca tastera: MODE → MODE → MODE → 2 → 6
 Prikaz na displeju će biti: 0.00000⁰⁰.

Stepen broja 10 se na kalkulatoru unosi pomoću tastera EXP.

Primer A.2.2 Izračunavanje sa stepenom broja 10:

$$1,15 \cdot 10^3 \times 4,78 \cdot 10^{-12}$$

$$1.15 \rightarrow \text{EXP} \rightarrow 3 \rightarrow \times \rightarrow 4.78 \rightarrow \text{EXP} \rightarrow (-) \rightarrow 12 \rightarrow = 5.49700^{-09}$$

Važno je napomenuti da taster EXP na kalkulatoru *ne predstavlja* funkciju e^x koja se u tehničkoj literaturi često označava sa $\exp(x)$.

Primer A.2.3 Izračunavanje sa funkcijom $e^x \equiv \exp(x)$:

$$e^2 \cdot e^{-3} \equiv \exp(2) \cdot \exp(-3)$$

$$\text{SHIFT} \rightarrow \ln \rightarrow 2 \rightarrow \times \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \ln \rightarrow (-) \rightarrow 3 \rightarrow = 3.67879^{-01}$$

Bilo koji stepen nekog broja se na kalkulatoru izračunava upotrebom tastera x^y , dok se koren izračunava upotrebom tastera SHIFT i x^y .

Primer A.2.4 Izračunavanje stepena i korena:

$$6^3 = 216$$

$$6 \rightarrow x^y \rightarrow 3 \rightarrow = 2.16000^{02}$$

$$3^{-4} = 0,01234567$$

$$3 \rightarrow x^y \rightarrow (-) \rightarrow 4 \rightarrow = 1.23457^{-02}$$

Pritiskom na taster ENG rezultat će na displeju biti prikazan u inženjerskom formatu: 12.3457⁻⁰³

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

$$4 \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow x^y \rightarrow 16 \rightarrow = 2.00000^{00}$$

Prirodni logaritam nekog broja se na kalkulatoru izračunava upotrebom tastera ln, a dekadni logaritam upotrebom tastera log.

Primer A.2.5 Izračunavanje prirodnog logaritma:

$$\ln 4,13 = 1,418277$$

$$\ln \rightarrow 4.13 \rightarrow = 1.41828^{00}$$

Izračunavanje dekadnog logaritma:

$$\log 4,13 = 0,615950$$

$$\log \rightarrow 4.13 \rightarrow = 6.15950^{-01}$$

Kod kalkulatora na računarima je sekvenca primene funkcijskih tastera obratna u odnosu na ručne kalkulatore (tj. najpre treba uneti broj, pa onda pritisnuti taster odgovarajuće funkcije, npr. $4.13 \rightarrow \ln$) Ovo je moguće postići i na ručnim kalkulatorima tako što se prvo unese broj za kojim sledi znak jednakosti, a zatim pritisne taster odgovarajuće funkcije, npr. $4.13 \rightarrow = \rightarrow \ln$.

Prilikom izračunavanja vrednosti trigonometrijskih funkcija (sinus, kosinus, tangens) posebnu pažnju treba obratiti na:

- režim rada kalkulatora, tj. da li je kalkulator podešen za rad u stepenima (*degrees*) ili radijanima (*radians*);
- definiciju inverznih trigonometrijskih funkcija.

$$360^\circ = 2\pi \text{rad.}$$

Primer A.2.6 Kalkulator sa Sl. A.1 se uvodi u režim rada u stepenima pritiskom tastera po sledećem redosledu:

MODE \rightarrow MODE \rightarrow 1

Za režim rada u radijanima, redosled je:

MODE \rightarrow MODE \rightarrow 2

Kod kalkulatora se vrednosti inverznih trigonometrijskih funkcija (*arcus* funkcija) izračunavaju na sledeći način:

Primer A.2.7 Izračunavanje funkcije arctan u stepenima:

$$\arctan 5 = 78,690067^\circ$$

$$\text{SHIFT} \rightarrow \tan \rightarrow 5 \rightarrow = 7.86901^{01}$$

Treba primetiti da notacija upotrebljena na tasterima kalkulatora (npr. \tan^{-1}) ne predstavlja recipročnu vrednost trigonometrijske funkcije ($1/\tan$). Recipročne vrednosti trigonometrijskih funkcija se izračunavaju na sledeći način:

Primer A.2.8 *Izračunavanje funkcije cot (kotangens) u stepenima:*

$$\cot 5 \equiv 1 / \tan 5 = 11,430052^\circ$$

$$\tan \rightarrow 5 \rightarrow = \rightarrow x^{-1} \rightarrow = 1.14301^{01}$$

Kalkulatori poseduju još dosta tehničkih funkcija, a za njihovu konkretnu upotrebu treba pogledati primere u korisničkom uputstvu svakog pojedinog tipa kalkulatora.

Dodatak B

Osnovne operacije sa kompleksnim brojevima

B.1 Definicije

Kompleksni broj Z sastoji se od **realnog dela X** i **imaginarnog dela Y** koji su povezani algebarskom relacijom:

$$\mathbf{Z} = X + jY , \quad (\text{B.1})$$

pri čemu je j , po definciji:

$$j = \sqrt{-1} , \quad (\text{B.2})$$

tako da je:

$$j^2 = -1 . \quad (\text{B.3})$$

Pored toga, važi i da je:

$$\frac{1}{j} = -j . \quad (\text{B.4})$$

Konjugovani kompleksni broj se dobija promenom znaka ispred imaginarnog dela kompleksnog broja:

$$\bar{\mathbf{Z}} = X - jY . \quad (\text{B.5})$$

Kompleksni broj se može prikazati u polarnoj formi u obliku:

$$\mathbf{Z} = |Z| \angle \theta , \quad (\text{B.6})$$

gde je $|Z|$ **moduo** kompleksnog broja, a θ **argument** kompleksnog broja, odnosno ugao koji može biti u stepenima ili radijanima. Relacije kojima su

povezane forme kompleksnog broja su:

$$\begin{aligned} |Z| &= \sqrt{X^2 + Y^2} \\ \theta &= \arctan \frac{Y}{X} \\ X &= Z_0 \cos \theta \\ Y &= Z_0 \sin \theta . \end{aligned} \tag{B.7}$$

B.2 Sabiranje

Kompleksni brojevi Z_1 i Z_2 se sabiraju tako što im se posebno saberu realni, a posebno imaginarni delovi:

$$\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = (\pm X_1 \pm X_2) + j(\pm Y_1 \pm Y_2) . \tag{B.8}$$

Primer B.2.1 Sabrati kompleksne brojeve $Z_1 = 3 + j7$ i $Z_2 = 11 + j2$.

$$\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = (3 + 11) + j(7 + 2) = 14 + j9 .$$

Dobijeni zbir se u polarnoj formi može predstaviti kao:

$$\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = \sqrt{14^2 + 9^2} \angle \arctan \left(\frac{9}{14} \right) = 16,64 \angle 32,73^\circ .$$

Primer B.2.2 Sabrati kompleksne brojeve $Z_1 = 2 - j5$ i $Z_2 = -9 + j2$.

$$\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = (2 - 9) + j(-5 + 2) = -7 - j3 .$$

B.3 Oduzimanje

Kompleksni brojevi Z_1 i Z_2 se oduzimaju tako što im se posebno oduzmu realni, a posebno imaginarni delovi:

$$\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2 = [\pm X_1 - (\pm X_2)] + j[\pm Y_1 - (\pm Y_2)] . \tag{B.9}$$

Primer B.3.1 Oduzeti kompleksne brojeve $Z_1 = 4 + j2$ i $Z_2 = 1 + j3$.

$$\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2 = (4 - 1) + j(2 - 3) = 3 - j .$$

Primer B.3.2 Oduzeti kompleksne brojeve $\mathbf{Z}_1 = 2 - j4$ i $\mathbf{Z}_2 = -6 - j8$.

$$\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2 = [2 - (-6)] + j[-4 - (-8)] = 8 + j4 .$$

B.4 Množenje

Kompleksni brojevi \mathbf{Z}_1 i \mathbf{Z}_2 se množe tako što im se moduli pomnože, a uglovi saberu:

$$\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2 = |\mathbf{Z}_1| |\mathbf{Z}_2| \angle \theta_1 + \theta_2 . \quad (\text{B.10})$$

Primer B.4.1 Pomnožiti kompleksne brojeve $\mathbf{Z}_1 = 1 + j4$ i $\mathbf{Z}_2 = 3 + j2$.

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2 &= \sqrt{1^2 + 4^2} \angle \arctan \left(\frac{4}{1} \right) \cdot \sqrt{3^2 + 2^2} \angle \arctan \left(\frac{2}{3} \right) \\ &= \sqrt{17} \angle 75,96^\circ \cdot \sqrt{13} \angle 33,69^\circ \\ &= \sqrt{17 \cdot 13} \angle (75,96^\circ + 33,69^\circ) \\ &= 14,87 \angle 109,65^\circ \\ &= 14,87 \cos 109,65^\circ + j14,87 \sin 109,65^\circ \\ &\simeq -5 + j14 \end{aligned}$$

Kompleksni brojevi se mogu množiti i u algebarskoj formi.

B.5 Deljenje

Kompleksni brojevi \mathbf{Z}_1 i \mathbf{Z}_2 se množe tako što im se moduli podele, a uglovi oduzmu:

$$\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} = \frac{|\mathbf{Z}_1|}{|\mathbf{Z}_2|} \angle \theta_1 - \theta_2 . \quad (\text{B.11})$$

Primer B.5.1 Podeliti kompleksne brojeve $\mathbf{Z}_1 = 3 + j5$ i $\mathbf{Z}_2 = 6 - j2$.

$$\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} = \frac{\sqrt{3^2 + 5^2} \angle \arctan \left(\frac{5}{3} \right)}{\sqrt{6^2 + 2^2} \angle \arctan \left(\frac{-2}{6} \right)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{34} \angle 59,04^\circ}{\sqrt{40} \angle -18,43^\circ} \\
 &= \sqrt{\frac{34}{40}} \angle (59,04^\circ - (-18,43)^\circ) \\
 &= 0,92 \angle 77,47^\circ \\
 &= 0,92 \cos 77,47^\circ + j0,92 \sin 77,47^\circ \\
 &\simeq 0,2 + j0,9
 \end{aligned}$$

Kompleksni brojevi se mogu deliti i u algebarskoj formi. U principu, kada je potreban rad sa više kompleksnih brojeva, operacije sabiranja i oduzimanja se lakše obavljaju kada su kompleksni brojevi u algebarskoj formi, a operacije množenja i deljenja kada su kompleksni brojevi u polarnoj formi. Prelaz iz algebarske u polarnu formu i obratno se može obaviti i upotrebom kalkulatora sa tehničkim funkcijama sa Sl. A.1.

Primer B.5.2 *Prevođenje kompleksnog broja $Z = 3 + j4$ u polarnu formu upotrebom kalkulatora:*

POL($\rightarrow 3 \rightarrow, \rightarrow 4 \rightarrow$) $\rightarrow = 5.00000^{00}$ RCL $\rightarrow \tan 5.31301^{01}$

Prevođenje kompleksnog broja $5 \angle 53,1301^\circ$ u algebarsku formu:

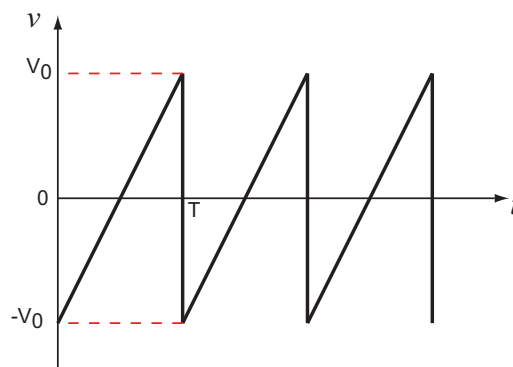
SHIFT \rightarrow POL($\rightarrow 5 \rightarrow, \rightarrow 53.1301 \rightarrow$) $\rightarrow = 3.00000^{00}$ RCL $\rightarrow \tan 4.00000^{00}$

Dodatak C

Izračunavanje efektivne i srednje vrednosti

C.1 Signal oblika testere

Posmatranjem geometrijske reprezentacije naizmeničnog signala oblika testere prikazanog na Sl. C.1 može se uočiti diskontinuitet u tačkama nT , $n = 1, 2, \dots$, što znači da se vrednost signala promeni od V_0 do $-V_0$ za vreme $t = 0$. Kod realnih signala je za ovu promenu potrebno konačno vreme t_f ,



Slika C.1: Naizmenični signal oblika testere.

pa signal predstavlja kontinualnu funkciju¹. Radi jednostavnijeg razmatranja, ovde će se podrazumevati prva perioda signala sa sl. C.1, pri čemu se implicitno podrazumeva da $t_f \rightarrow 0$, što znači da će postojanje diskontinui-

¹Vreme t_f naziva se vreme opadanja zadnje ivice signala (*fall time*). Kod signala oblika pravougaonika analogno se definiše i vreme porasta prednje ivice signala t_r (*rise time*).

teta biti zanemareno². Ovaj signal se u tom slučaju može opisati funkcijom:

$$v(t) = \frac{2V_0}{T}t - V_0. \quad (\text{C.1})$$

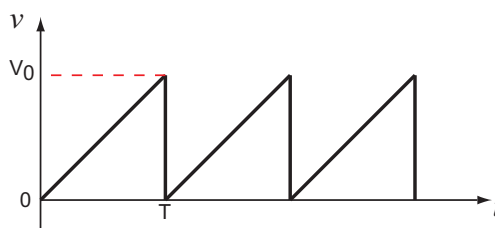
Korišćenjem identičnog pristupa kao u 2.4.1, tj. primenom (2.12) i (2.13) na (C.1) izračunava se efektivna vrednost signala oblika testere:

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt} = \frac{V_0}{\sqrt{3}}. \quad (\text{C.2})$$

Srednja vrednost signala oblika testere je:

$$V_{AVG} = \frac{1}{T} \int_0^T |v(t)| dt = \frac{V_0}{2}. \quad (\text{C.3})$$

Specijalan slučaj signala oblika testere je signal oblika rampe čija je geometrijska reprezentacija prikazana na Sl. C.2. Ako se, kao u prethodnom



Slika C.2: Signal oblika rampe.

slučaju, zanemari postojanje diskontinuiteta, ovakav signal se može u prvoj periodi predstaviti funkcijom:

$$v(t) = \frac{V_0}{T}t. \quad (\text{C.4})$$

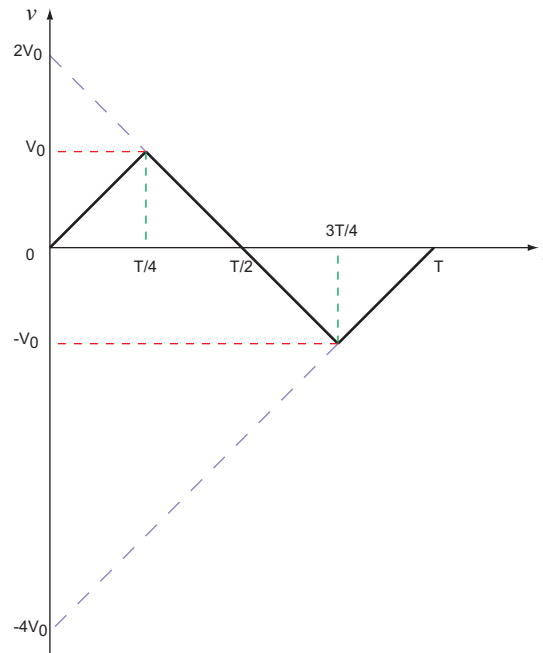
Primenom (C.2) i (C.3) na (C.4) dobija se da su efektivna i srednja vrednost signala jednake $V_{RMS} = V_0/\sqrt{3}$ i $V_{AVG} = V_0/2$, respektivno, dakle iste kao i u slučaju naizmerničnog signala oblika testere.

C.2 Signal oblika trougla

Geometrijska reprezentacija naizmerničnog signala oblika trougla data je na Sl. C.3. Ovaj signal se može u prvoj periodi predstaviti funkcijom:

$$v(t) = \begin{cases} \frac{4V_0}{T}t & , 0 \leq t \leq \frac{T}{4} \\ -\frac{4V_0}{T}t + 2V_0 & , \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3T}{4} \\ \frac{4V_0}{T}t - 4V_0 & , \frac{3T}{4} \leq t \leq T \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

²Treba primetiti da uvođenje ovakvog pojednostavljenja, s obzirom na prostperiodičnost signala, ne umanjuje opštost dobijenih rezultata.



Slika C.3: Naizmjenični signal oblika trougla.

Primenom (2.12) i (2.13) na (C.5) dobija se da su efektivna i srednja vrednost naizmjeničnog signala oblika trougla jednake $V_{RMS} = V_0/\sqrt{3}$ i $V_{AVG} = V_0/2$, respektivno.

C.3 Signal oblika pravougaonika

Ako se, kao kod naizmjeničnog signala oblika testere, zanemari postojanje diskontinuiteta, na osnovu Sl. 2.11 se za prvu periodu može napisati:

$$v(t) = \begin{cases} V_{DC} + V_0 & , 0 \leq t \leq t_0 \\ V_{DC} - V_0 & , t_0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (C.6)$$

Primenom definicije (2.12) na (C.6) dobija se:

$$V_{RMS} = \sqrt{(V_{DC} + V_0)^2 \frac{t_0}{T} + (V_{DC} - V_0)^2 \left(1 - \frac{t_0}{T}\right)}. \quad (C.7)$$

Srednja vrednost signala sa sl. 2.11 je, na osnovu definicije (2.13), jednaka:

$$V_{AVG} = |V_{DC} + V_0| \frac{t_0}{T} + |V_{DC} - V_0| \left(1 - \frac{t_0}{T}\right). \quad (C.8)$$

U specijalnom slučaju, kada je $t_0 = T/2$, srednja vrednost signala je $V_{AVG} = V_{DC}$, jer je $V_{DC} > V_0$. Međutim, kada je $V_{DC} = 0$ i $t_0 = T/2$, srednja vrednost signala je $V_{RMS} = V_{AVG} = V_0$.

Dodatak D

Izračunavanje napona u prelaznom režimu kondenzatora

U trenutku $t = 0$, na ulazu kola sa Sl. 3.5 se pojavio napon v_{in} amplitude $V_0 = 1$ V. Prema zaključku iz 3.2, da bi se na kondenzatoru pojavio napon v_C kroz kolo mora najpre da protekne struja i_{R_s} , koja stvara pad napona na otporniku v_{R_s} . To znači da je u trenutku $t = 0$ struja kroz kolo:

$$i_{R_s}(0) = \frac{V_0}{R_s}. \quad (D.1)$$

Time je stvoren uslov za nagomilavanje naelektrisanja Q na oblogama kondenzatora, tj. za početak punjenja kondenzatora:

$$v_{in}(t) = i_{R_s}(t)R_s + \frac{Q(t)}{C}. \quad (D.2)$$

Pošto je struja definisana kao promena količine naelektrisanja u vremenu $i_{R_s}(t) = dQ(t)/dt$, to (D.2) postaje:

$$v_{in}(t) = i_{R_s}(t)R_s + \frac{1}{C} \int_0^t i_{R_s}(t) dt, \quad (D.3)$$

odakle se diferenciranjem dobija:

$$\frac{dv_{in}(t)}{dt} = R_s \frac{di_{R_s}(t)}{dt} + \frac{1}{C} i_{R_s}(t). \quad (D.4)$$

Prema Sl. 3.6 je $dv_{in}(t)/dt = 0$ za $0 < t < T/2$, pa se iz (D.4) dobija:

$$\frac{di_{R_s}(t)}{i_{R_s}} = -\frac{1}{R_s C} dt. \quad (D.5)$$

Integraljenjem (D.5) u opštem slučaju (granice integrala su 0 i t) se dobija:

$$i_{R_s}(t) = i_{R_s}(0) \exp\left(-\frac{t}{R_s C}\right), \quad (\text{D.6})$$

a korišćenjem (D.1) dolazi se do:

$$i_{R_s}(t) = \frac{V_0}{R_s} \exp\left(-\frac{t}{R_s C}\right). \quad (\text{D.7})$$

Iz (D.7) se može dobiti vremenska zavisnost promene napona na kondenzatoru:

$$v_C(t) = v_{in}(t) - i_{R_s}(t)R_s = V_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{R_s C}\right)\right]. \quad (\text{D.8})$$

Dodatak E

Određivanje napona na kondenzatoru u RC kolu

Jednačina (3.11) glasi:

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = V_0 \sin(\omega t) , \quad (\text{E.1})$$

što je linearna nehomogena diferencijalna jednačina prvog reda ili redukovana linearna nehomogena diferencijalna jednačina drugog reda. Rešenje ove jednačine se dobija tako što se najpre potraži rešenje v_{C0} homogene jednačine:

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = 0 \quad (\text{E.2})$$

i to metodom razdvajanja promenljivih, tako da je:

$$\frac{dv_C}{v_C} = -\frac{1}{RC} dt , \quad (\text{E.3})$$

odakle je (videti i 3.2.1):

$$v_{C0} = K \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) , \quad (\text{E.4})$$

pri čemu je K konstanta. U daljem postupku se pretpostavlja da je partikularno rešenje (E.1) oblika:

$$\eta = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) , \quad (\text{E.5})$$

gde su A i B konstante koje treba odrediti. Iz (E.5) je:

$$\frac{d\eta}{dt} = -\omega A \sin(\omega t) + \omega B \cos(\omega t) . \quad (\text{E.6})$$

Zamenom (E.5) i (E.6) u (E.1) dobija se:

$$(B - \omega R C A) \sin(\omega t) + (A + \omega R C B) \cos(\omega t) = V_0 \sin(\omega t) . \quad (\text{E.7})$$

Iz (E.7) se, izjednačavanjem članova se leve i desne strane, dobija:

$$B - \omega R C A = V_0 \quad (\text{E.8})$$

$$A + \omega R C B = 0, \quad (\text{E.9})$$

odakle se izračunavaju konstante A i B . Zamenom dobijenih vrednosti za A i B u (E.5) dobija se:

$$\eta = \frac{V_0}{1 + (\omega R C)^2} (\sin \omega t) - \omega R C \cos(\omega t) . \quad (\text{E.10})$$

Rešenje (E.1) je zbir:

$$v_C = v_{C0} + \eta , \quad (\text{E.11})$$

pri čemu se konstanta K određuje iz uslova da je $v_C = 0$ kada je $t = 0$:

$$K = \omega R C \frac{V_0}{1 + (\omega R C)^2} . \quad (\text{E.12})$$

Zamenom (E.12) u (E.4) jednačina (E.11) postaje:

$$v_C = \frac{V_0}{1 + (\omega R C)^2} \left[\sin(\omega t) + \omega R C \left(\exp\left(-\frac{t}{R C}\right) - \cos(\omega t) \right) \right] , \quad (\text{E.13})$$

što je i konačno rešenje jednačine (E.1).

Dodatak F

Izračunavanje struje u prelaznom režimu kalema

Polazeći od toga da je $v_{in} = v_{R_s} + v_L$ i imajući u vidu (3.19), može se napisati¹:

$$v_{in} = R_s i_{R_s} + L \frac{di_{R_s}}{dt}, \quad (\text{F.1})$$

pri čemu je i_{R_s} struja kroz kolo. Ako se (F.1) posmatra u nekom trenutku t za koji je $v_{in} = V_0$, može se napisati:

$$R_s i_{R_s} + L \frac{di_{R_s}}{dt} = V_0, \quad (\text{F.2})$$

što se svodi na:

$$\frac{di_{R_s}}{V_0 - R_s i_{R_s}} = \frac{dt}{L}. \quad (\text{F.3})$$

U trenutku $t = 0$ struja i_{R_s} mora biti jednaka nuli jer, prema zaključku iz 3.4, da bi struja protekla najpre mora da se stvori pad napona na kalem, pa je, u opštem slučaju:

$$\int_0^{i_{R_s}} \frac{di_{R_s}}{V_0 - R_s i_{R_s}} = \frac{1}{L} \int_0^t dt. \quad (\text{F.4})$$

Rešavanjem (F.4) dobija se struja u kolu:

$$i_{R_s} = \frac{V_0}{R_s} \left[1 - \exp\left(-\frac{R_s}{L} t\right) \right], \quad (\text{F.5})$$

koja je ilustrovana na Sl. 3.14.

¹Pojava u uloga otpornika R_s su komentarisani u 3.2.1, pa i ovde važi ista argumentacija.